# DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

RICARDO CANTORAL URIZA

Subsecretaría de Educación Media Superior

# Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional


Ricardo Cantoral Uriza

Investigador de

DME-Cinvestav

**Ricardo Cantoral Uriza**
Coordinador de la Serie

**Primera edición, 2013**

Subsecretaría de Educación Media Superior
Argentina # 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc
México, Distrito Federal

**ISBN: 978-607-9362-03-4**

Impreso en México

# CONTENIDO

# PRÓLOGO

## Estimada profesora, estimado profesor:

Como parte de una estrategia de largo plazo para la profesionalización docente en el campo de las matemáticas, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) y la Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, diseñaron un plan para elaborar estos materiales dirigidos a las y los profesores de Matemáticas del país. En un segundo momento, con la colaboración de la red de egresados de Matemática Educativa y el apoyo de la Sociedad Matemática Mexicana, llevaremos a cabo mesas, foros, seminarios, cursos y diplomados mediante un Plan Nacional para la Profesionalización Docente en las Matemáticas Escolares.

Quienes estamos interesados en el aprendizaje de las matemáticas no podemos reducir los conceptos a sus definiciones, ni limitar las experiencias didácticas a la repetición memorística de algoritmos y resultados. Aprender matemáticas no puede limitarse a la mera copia del exterior a través de resultados previamente elaborados, o digamos que, a su duplicado; sino más bien, es el resultado de construcciones sucesivas cuyo objetivo es garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje.

Una consecuencia educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos; nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes del bachillerato operan con los números, cómo entienden la pendiente de una recta, cómo construyen y comparten significados relativos a la noción de función o proporcionalidad, o cómo se explican a sí mismos nociones de azar. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende. Estos textos se diseñaron para ayudar al docente a explorar y usarlos para una enseñanza renovada aprovechando las formas naturales en que los estudiantes razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta a este respecto la investigación en Matemática Educativa.

El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo y propositivo, pues sobre él o ella recae más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares.

Los resultados de las pruebas nacionales de corte masivo, utilizadas con fines de investigación, permitirían saber cuáles conceptos y procesos requieren todavía adaptaciones progresivas con el fin de mejorar su aprendizaje. Si bien los últimos resultados de las pruebas de logro académico estandarizadas muestran un incremento en el porcentaje de la población estudiantil con resultados satisfactorios y un decremento en el complemento, aún falta mejorar la atención en algunas temáticas particulares.

Gracias a la labor que lleva a cabo el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, a través de sus profesores, egresados e investigadores en formación, sabemos cuáles asuntos, de naturaleza transversal, resultan fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias, como puede ser el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, la constitución de un lenguaje gráfico para las funciones, el desarrollo del pensamiento trigonométrico, el pensamiento proporcional y el pensamiento estadístico. Estos asuntos siguen siendo un reto de la mayor importancia para mejorar los aprendizajes entre los estudiantes del bachillerato mexicano.

Por esta razón, los cinco volúmenes de esta colección fueron pensados para el docente de matemáticas. Su lectura, análisis y discusión permitirá mejorar los procesos de aprendizaje matemático. Los títulos de los textos de la serie son los siguientes:

Vol. 1 - *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*

- Rosa María Farfán Márquez

Vol. 2 - *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*

- Gisela Montiel Espinosa

Vol. 3 - *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*
- Ricardo Cantoral Uriza

Vol. 4 - *La transversalidad de la proporcionalidad*

- Daniela Reyes Gasperini

Vol. 5 - *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*

- Ernesto Sánchez Sánchez

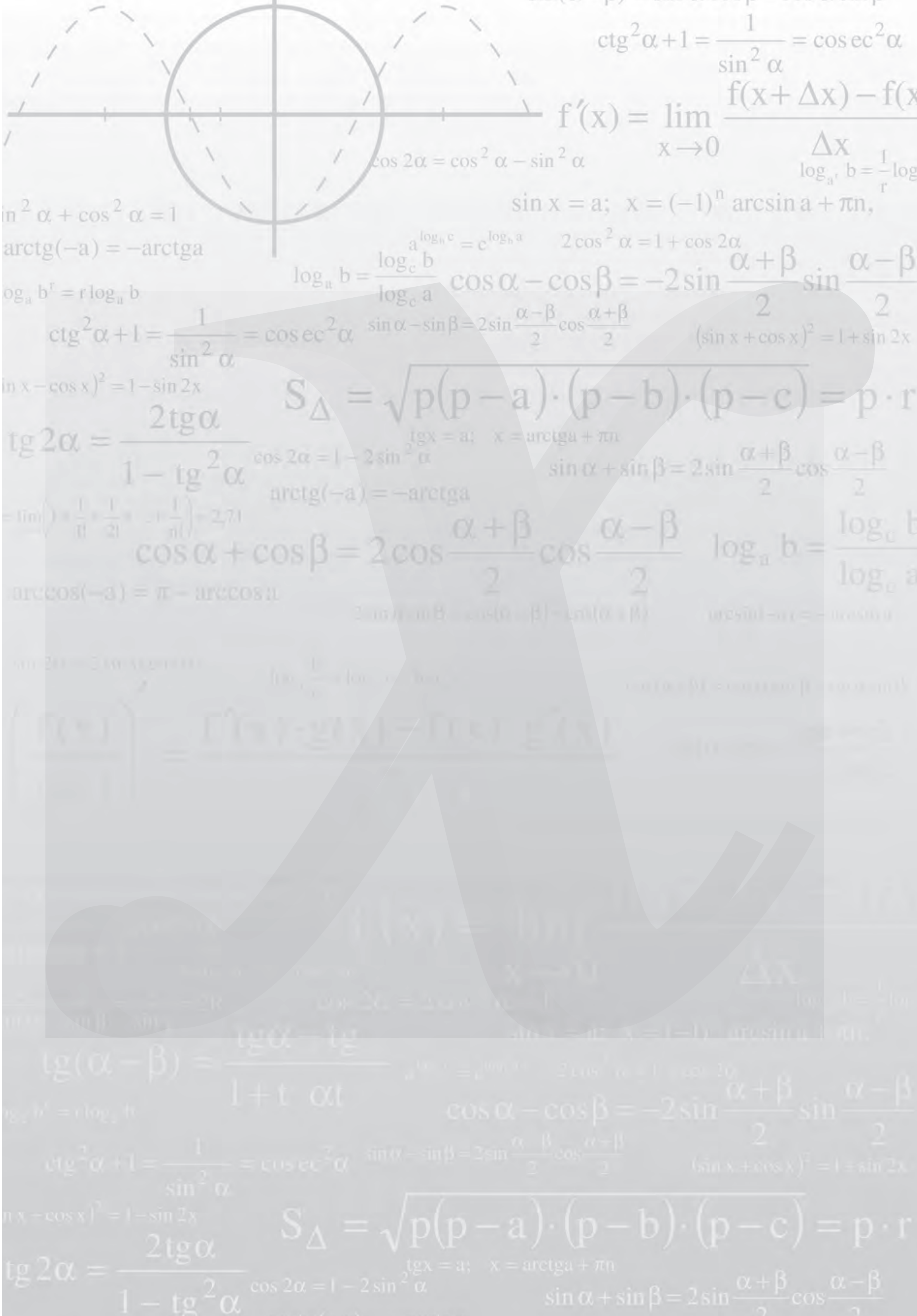
Según la profesora Régine Douady, *saber matemáticas* precisa de dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Por otra parte, también significa identificar a las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí donde se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y despersonalización participa del proceso de apropiación del conocimiento. Por su parte, para un profesor enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para éstos, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final sea la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos.

Ésta es pues la primera de una serie de iniciativas coordinadas para la mejora de la educación en el campo de las matemáticas del bachillerato. No me resta más que animarles a estudiar y discutir los materiales que ahora tienen en sus manos, el camino es largo, pero iremos juntos ...

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Jefe del Departamento

Matemática Educativa – Cinvestav



$ctg^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\cos ec^2\alpha$
$f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\sin x=a;\ \ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$arctg(-a)=-arctga$
$2\cos^2\alpha=1+\cos2\alpha$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\log_a b^r=r\log_a b$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin2x$
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=p\cdot r$
$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
$tgx=a;\ \ x=arctga+\pi n$
$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$

# 1. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Tradicionalmente se ha considerado la enseñanza de las matemáticas como una suerte de arte que libremente queda bajo el virtuosismo del profesor. El efecto de esa enseñanza sobre el aprendizaje del alumno suele ser evaluada en relación con el buen comportamiento escolar del estudiante, con la aprobación o reprobación del curso, y no se discute demasiado lo que ocurre con el aprendizaje; se confunde de este modo la *acreditación* con el ***aprendizaje***. Se supone, en esta visión, que el *aprendizaje* de los alumnos depende exclusivamente de la atención que presten y del seguimiento que hagan a la exposición del profesor, del dominio que éste tenga tanto al nivel del arte en su enseñanza como al de su maestría en el tema. Esta visión desafortunadamente domina en las aulas escolares contemporáneas, pero está cambiando paulatinamente y, en nuestra opinión, sus más profundas transformaciones aún están por llegar.

Ante estas prácticas escolares, que bien podríamos llamar tradicionales, en cambio emergen concepciones que consideran la *actividad matemática* en un sentido más amplio, según las cuales, dicha actividad no se restringe a los algoritmos y formalismos pues, como toda *actividad humana*, depende de una enorme variedad de restricciones de naturaleza cultural, histórica e institucional. Factores como: motivación, afectividad, imaginación, aspectos lingüísticos, visualización, intuición, comunicación y representación desempeñan un papel fundamental en la conformación de las ideas matemáticas entre los estudiantes.

Desde esta perspectiva, nuestra forma de aprender matemáticas no puede reducirse a la mera copia del exterior, sino más bien es el resultado de construcciones sucesivas, cuyo objetivo es garantizar el éxito de nuestra actuación ante una cierta situación. Esto implica reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos. Como se menciona en el Prólogo de este libro, nos debe importar saber cómo los estudiantes operan con los números, cómo entienden la pendiente de una recta, cómo construyen y comparten significados relativos a la noción de función o cómo ellos se explican a sí mismos nociones de azar o proporcionalidad. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza, según el cual el maestro enseña y el alumno aprende. Estos métodos permiten explorar y usar, para una enseñanza renovada, las formas naturales o espontáneas en que los estudiantes razonan las matemáticas.

Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos; es decir, que el conocimiento sea una manifestación importante de los "juegos" de la escuela.

Enseguida mostramos algunos ejemplos para el tratamiento del contenido que consideramos interesantes, pues han sido construidos atendiendo a las formas como los estudiantes se comportan ante ciertas tareas. Uno es relativo al tratamiento didáctico *del cálculo mental* y el otro a la comparación de funciones. Primeramente diremos que el cálculo mental es considerado una tarea matemática que no precisa de escritura y que puede desarrollarse en periodos breves de estas actividades de una clase. Secuencias de cinco a diez minutos de estas actividades con los estudiantes del grupo les permite desarrollar habilidades del pensamiento que serán usadas en su formación posterior. Verbalmente, el profesor propone operaciones por realizar, mientras que los estudiantes escuchan y memorizan la pregunta. Posteriormente efectúan la operación y comunican al grupo y al maestro su resultado. A continuación el profesor les demanda una explicación de sus cálculos. En ese momento el docente favorece la discusión entre los diferentes métodos propuestos y busca que los estudiantes defiendan o refuten dichos métodos. Ello tiene, naturalmente, una intención didáctica. Este proceso permite a los alumnos distinguir métodos y seleccionar aquellos más veloces o efectivos. En esas actividades, los alumnos usan teoremas como herramientas, aunque no sean conscientes de su empleo. Por ejemplo, ante la pregunta del maestro de cuánto es 11 por 11 un joven da una respuesta menor que 110. Otro alumno dice: "esa respuesta no puede ser correcta, pues 11 por 10 es 110 y él ha obtenido un número menor que 110". Este argumento exhibe el uso del siguiente teorema: si $c > 0$ y $a < b$, entonces $ac < bc$. En este momento el saber opera en el nivel de herramienta, pues no se ha constituido como un resultado general aceptado socialmente entre los estudiantes en su clase. En otro momento, ellos lograrán escribir y organizar sus hallazgos y en esa medida reconocer resultados en un nivel más general. En ese sentido, la evolución de lo oral a lo escrito es un medio para la construcción del significado y para el aprendizaje matemático. En ese proceso tendrá lugar la dialéctica *herramienta–objeto*.

En segundo término, el ejemplo de funciones: con la pregunta ¿a partir de dónde $f(x) = 2^x$ es mayor que $g(x) = x^2 + 2$?, un joven dice: "la exponencial siempre es más grande que un polinomio". Otro alumno dice: "eso no es correcto, debemos saber dónde se cruzan las dos gráficas". Este segundo argumento muestra niveles de visualización interesantes para desarrollar un *pensamiento y lenguaje variacional*, utiliza además implícitamente el problema descrito del cálculo mental. Este argumento basado en la visualización exhibe la existencia, en el pensamiento del joven, de un resultado correcto: si $f(x) > g(x)$ a partir de $x_0$ entonces la gráfica de $f$ está por encima de la gráfica de $g$, a partir del número $x_0$...

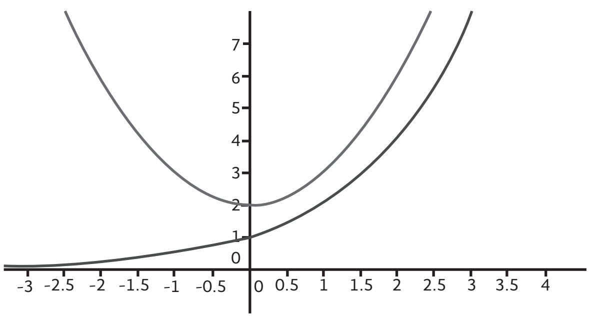



**Figura 1**. Dibujo de las gráficas de $f$ y $g$ cerca del origen.
(En esta ventana, la gráfica de $g$ está por encima de la de $f$).

Una cuestión fundamental de importancia contemporánea consiste en adecuar una enseñanza, en el sentido más vasto del término, a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los contextos histórico, institucional y cultural que requiere la actividad matemática. La tarea, como puede verse, no resulta simple. Este intento nos plantea una cuestión básica: ¿de qué manera el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje en matemáticas puede influir benéficamente en la enseñanza? Una razón que nos sirve para explicar la complejidad del conocimiento matemático consiste en observar que las nociones matemáticas desempeñan un papel dual: el de *proceso* y el de *objeto*, en función de la situación y de la conceptualización que el alumno tenga. Típicamente, el *aprendizaje* de un concepto incluye muchas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados y que eventualmente quedan por completo fuera de un semestre escolar. Por ejemplo, se debe iniciar con el desarrollo de un proceso en términos concretos, y en la medida en que el alumno se familiariza con los procesos, éstos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento. El alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una nueva y única entidad, digamos que en un nuevo objeto. Una vez que éste se ha sido adquirido, el estudiante ha desarrollado cierta habilidad para pensar dicha noción, ya sea en el nivel dinámico, como un proceso, o en el nivel estático, como un objeto. Este manejo dual permite al estudiante pensar en términos de posibilidades: ¿qué ocurriría si yo hago o no hago una cierta operación?

Dado que la matemática trata con números, variables o funciones, por citar algunos, todos ellos pueden considerarse *objetos*. Éstos se articulan entre sí mediante relaciones; cada objeto es a su vez parte de una estructura más amplia de objetos. Los procesos se componen de operaciones sobre esos objetos y transforman a los objetos mismos. Por ejemplo, toda función específica puede considerarse como un proceso que opera sobre números: los transforma en otros números y después será considerada como un objeto en sí misma.

De modo que la enseñanza de las matemáticas sacaría provecho de las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático y sobre las formas en que se concibe la construcción social del conocimiento matemático. En la enseñanza usual, estos hechos suelen ser desconocidos tanto por los profesores como por los diseñadores de currículos o los propios autores de textos escolares, de manera que se corre el riesgo de perder un enorme espectro de posibilidades para enriquecer la acción didáctica. Un profesor que conozca el desarrollo del pensamiento matemático, será sensible al reconocimiento de la existencia de varias epistemologías: la epistemología del profesor, la epistemología del alumno o la epistemología del saber en sí. En este momento, quizá la visión más extendida entre los profesores sea aquella que asume que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que sólo deben comunicarse a sus alumnos, en una enseñanza pulcra y libre de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por sus estudiantes como herramientas capaces de tratar con varias clases de situaciones.

Una de las fuentes más ricas para detectar dificultades en el aprendizaje de los alumnos es la experiencia directa frente al salón de clases; ésta nos permite percibir problemas y dificultades en la apropiación de algunos conceptos, producto de varios factores que están presentes en este proceso. Es así que aprovechando los comentarios que nos hicieran grupos de docentes, producto de su extensa experiencia en el aula, proponemos reflexionar, como ellos lo hicieran, sobre algunos tópicos. Uno de los objetivos de la enseñanza escolarizada es tratar con conocimientos especializados. En general, se considera que el profesor es el protagonista principal del proceso de enseñanza–aprendizaje y que el alumno se limita a aceptar pasivamente aquello que se le propone, sin tener una participación activa en la construcción de lo que aprende. Hoy sabemos que los conocimientos así adquiridos se olvidan fácilmente y no quedan integrados en las estructuras lógicas de los alumnos ni parecen fortalecer su pensamiento matemático. Como consecuencia, estos conocimientos sólo pueden utilizarse en condiciones muy similares a las que fueron recibidos. En la actualidad, se propone, como una forma de aprender significativamente, que el alumno reconstruya los conceptos. Que el aprendizaje se base en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas.

De esta manera, la función del profesor es la de guiar el aprendizaje, de proponer actividades que los enfrente a las dificultades inherentes al nuevo concepto y de proporcionarles las herramientas para superarlas, es decir, incentivar el proceso de pensamiento en el alumno de tal manera que le permita enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones. Esto es, darle al alumno un papel más activo en su propio proceso de apropiación de un concepto, confiriéndole una mayor responsabilidad.

Por otro lado, algunos profesores enseñan matemáticas igual que como está en el libro de texto; es decir, limitándose a reproducir el contenido en el pizarrón. En general, los libros que se utilizan en las clases provienen frecuentemente de sistemas escolares diferentes al nuestro, y en ese sentido responden a fines diversos. Esto provoca que la enseñanza se convierta en una exposición de contenidos sin atractivo para los alumnos, donde los ejemplos y ejercicios propuestos no son significativos ni cercanos a su realidad, lo cual conduce al rechazo casi automático de la clase de matemáticas.

Quizá un primer paso para la superación de este problema sea el fomentar el uso de textos escritos para nuestro sistema educativo, de aquellos que rescatan nuestro acervo cultural, nuestros problemas, aquellos cuyo contenido y presentación incentiven la creatividad del docente y de los alumnos, donde se favorezca la enseñanza y aprendizaje por descubrimiento. Es por tanto relevante que las problemáticas en el salón de clases sean abordadas a través de investigaciones, lo cual contribuye al mejoramiento de la enseñanza y responde a la necesidad de una búsqueda permanente de democratización del acceso al saber que ella involucra. Esto exige de teorías que lo permitan, como la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (Cantoral, 2013).

En general se enfrenta a los alumnos a situaciones problemáticas ficticias y sin relación con otras ciencias ni con su vida misma, lo que produce un desinterés profundo por los temas escolares.

Resulta importante entonces, reflexionar sobre el tipo de problemas y de actividades que les planteamos a los estudiantes: ¿cuáles de ellos están basados en situaciones reales donde aparezcan las estructuras matemáticas que se desean enseñar? ¿Se recurre a otras ciencias, que usan las matemáticas, para que el aprendizaje tenga sentido para el alumno y que haya una motivación por adquirirlo? ¿Qué actividades se proponen para que los conceptos adquieran significado entre los alumnos?

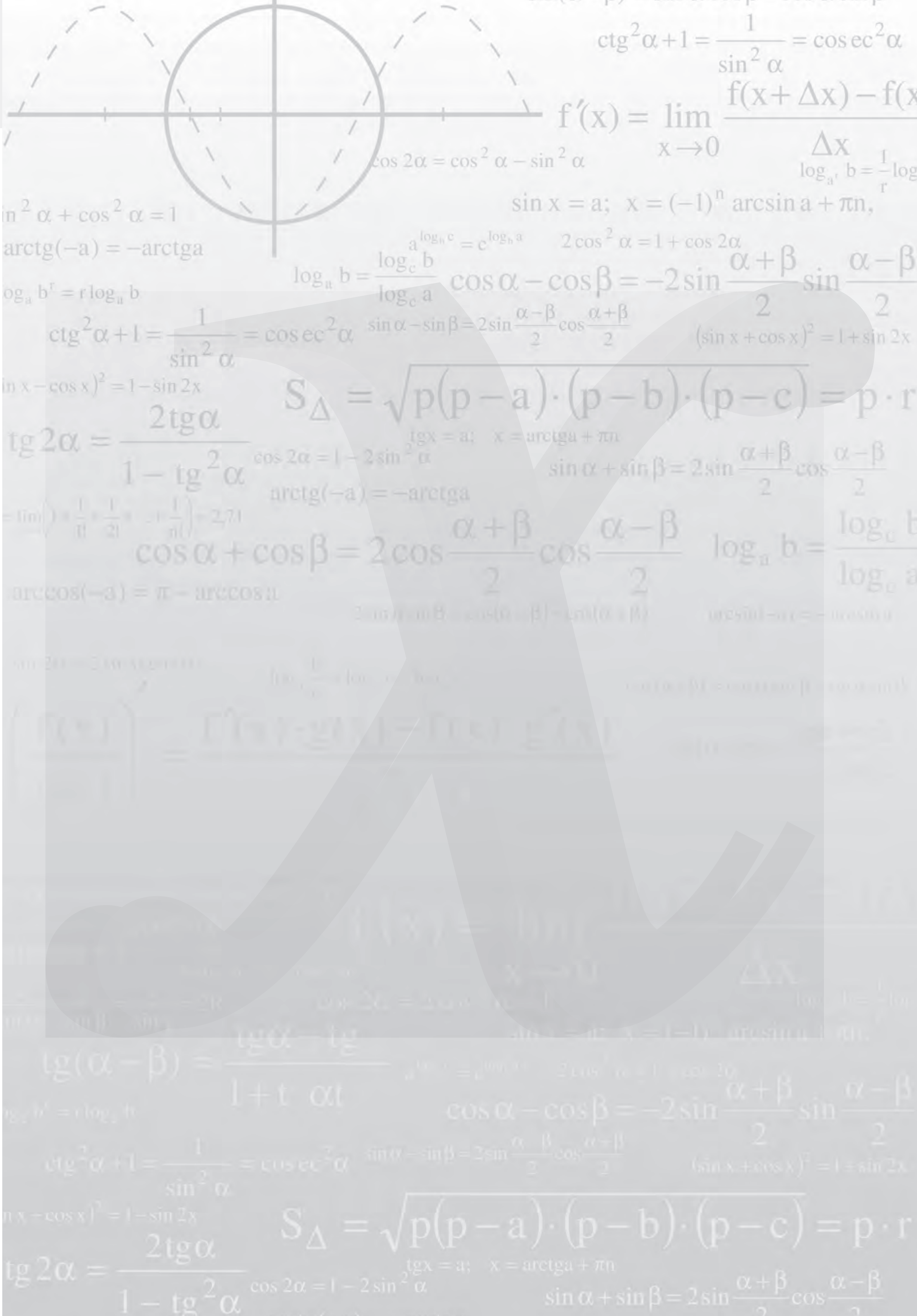
En ciertas ocasiones, el profesor presenta un problema, pero no destina suficiente tiempo a sus estudiantes para que ellos propongan soluciones y exploren posibilidades y en consecuencia no promueven el desarrollo de su pensamiento matemático. Quizá al estar presionados por los tiempos institucionales, los profesores ocupados en desarrollar por completo una programación temática muy extensa prefieran, pese a que se plantean actividades de resolución de tareas a los alumnos, reducir los tiempos de exploración y debate en clase de matemáticas. Cuántas veces, por ejemplo, se permite que los estudiantes lleguen a la solución de un problema a través de preguntas genéricas como: ¿qué hacemos? ¿Ustedes qué piensan? ¿Alguien tiene una idea distinta? ¿Qué ocurrirá si en vez de esto hacemos esto otro?

En ese sentido, es frecuente observar que el diseño de la clase no incluye como actividad habitual, que los alumnos argumenten sobre los conceptos que se tratan o que ellos directamente expongan sus propias ideas, menos aún que refuten las consideraciones de sus compañeros o las de su profesor. Es así como se pierde el potencial que todo alumno posee para debatir en matemáticas y en ciencia; se pierden los hilos de la argumentación y sus ideas cotidianas no evolucionan hacia ideas científicas. Esto también, como podrá comprenderse, induce un comportamiento contemplativo en sus acciones de la vida diaria, cuando el estudiante tenga que defender sus creencias y, por tanto, se inhibe el desarrollo de una amplia gama de habilidades intelectuales. De manera que al abrir un espacio en la clase de matemáticas para que los alumnos expresen lo que piensan de algún concepto matemático y que puedan refutar la opinión de sus compañeros se torna importante, digamos fundamental, en el desarrollo de su pensamiento en general y de su pensamiento matemático en particular. Además, este tipo de interacción en el aula favorece el desarrollo del pensamiento crítico, ya que se incentiva que se ofrezcan alternativas de solución de algún problema y que argumentando con base en ello se favorezca el desarrollo intelectual de los alumnos.

La mayoría de éstos, en sus clases de matemáticas, memorizan y optimizan los conocimientos antes de que verdaderamente puedan integrar conceptos o procedimientos matemáticos. En nuestra opinión, ello se debe a que no pueden de una vez y para siempre asimilar la compleja estructura de las matemáticas mediante prácticas de memorización, perdiendo, en consecuencia, una visión de lo que "está detrás" de las definiciones y los procedimientos asociados a los conceptos y a las técnicas de base de los alumnos, lo que implica un escaso aprendizaje, pues no pueden aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de ciertas tareas matemáticas o extra–matemáticas. Es por ello que, al pretender enseñar un concepto, se deben favorecer las diversas miradas que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, con el fin de que los saberes antes adquiridos puedan ir formando una cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional.

En términos generales, la enseñanza no recurre a las estrategias de visualización como una actividad con "verdadero estatus matemático" y los conceptos se manejan de manera más bien formal. El conocimiento matemático, entonces, se presenta en forma abstracta, sin base empírica, lo que produce en los alumnos una serie de dificultades que inhiben el aprendizaje. En muchos casos, se introducen conceptos dando prioridad excesiva al marco algebraico o al numérico, dejando de lado el manejo de significados en los dominios visual o verbal. Todo ello suele apoyarse en una creencia ampliamente difundida que coloca las estrategias algebraicas en el terreno de lo fácilmente enseñable y se cree que se trata de una buena forma de facilitar la apropiación de conceptos.En nuestra opinión, resulta conveniente utilizar más la visualización en las clases de matemáticas con el fin defavorecer diversas formas de representación, tanto de conceptos como de procesos, y permitir de este modo que se exploren otros tipos de argumentación.

En muy pocas ocasiones se utiliza el acercamiento o la “demostración informal” que los alumnos pudieran haber realizado en clase. Por el contrario, se comienza por formalizar un concepto y a presentar una demostración complicada con un considerable rigor matemático, lo cual induce un desánimo entre los alumnos y se favorece la creencia de que los temas estudiados están fuera de su alcance. Consideramos que una manera de motivar la confianza en su propia capacidad para tratar con las matemáticas consiste en apoyarse cada vez más en los propios procesos mentales del estudiante. Respetar más sus conjeturas, sus procedimientos heurísticos, utilizar sus ensayos y exploraciones, dejando que su intuición pueda servir como punto de partida de la actividad en la clase. A continuación abundaremos sobre estos asuntos. Con frecuencia, el trabajo en clase se realiza de manera individual, y en general, se pide a los estudiantes que no compartan sus experiencias o sus resultados. Propuestas de interés para encarar este reto pueden leerse en Farfán (2012).



# 2. NOTAS SOBRE LA ENSEÑANZA ACTUAL

Los estudiantes del bachillerato e incluso del nivel universitario, muestran que después de cursar una o más asignaturas relativas al Cálculo diferencial e integral, no logran una comprensión satisfactoria de los conceptos e ideas más relevantes. Por ejemplo en México, Reséndiz (2006) identificó que estudiantes de ingeniería poseen una concepción débil tanto de las funciones como de sus derivadas; no les atribuyen significados y carecen de estrategias para reconocerlas en su aplicación ante diferentes tareas que precisan de la derivada para medir cambios instantáneos. En un sentido general, diríamos que algunos estudiantes al concluir su bachillerato se encuentran en la situación descrita. Todo a pesar de que, como objetivo didáctico, hayamos declarado que "la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación" (Cantoral y Farfán, 1998).

No obstante esta consideración, la enseñanza del cálculo en el bachillerato tiene poca relación con dominios de la ingeniería, con episodios de la vida cotidiana que precisan del estudio del cambio, e incluso con ejemplos de la física, química o biología, y se caracteriza más bien por estar regida por un discurso matemático escolar tradicionalista, donde predominan algoritmos del tipo algebraico y algunos aspectos formales de la matemática (densidad de los racionales e irracionales, el principio de completez, las situaciones límite y el infinito). Se trata de una enseñanza centrada en objetos formales carente de referentes concretos para la variación y el cambio. Un ejemplo palpable de esta situación se localiza al nivel del uso de las gráficas de funciones en el bachillerato, el cual suele ser visto más como un recurso de comunicación visual, que como un recurso para la genuina *construcción de conocimiento matemático*.

La ausencia de ideas variacionales en la enseñanza del nivel medio superior, no contribuye en el aprendizaje de profundos conceptos del Cálculo diferencial e integral. Se olvida en la enseñanza, que desde sus inicios, los conceptos matemáticos han contado con una dualidad herramienta–objeto para construir el saber. Ideas como la *predicción* anteceden al concepto formal de derivada y de derivadas sucesivas.

Se ha utilizado la *predicción* como una herramienta de modelación en los fenómenos de cambio (fenómenos físicos como caída libre, tiro parabólico, movimiento de los planetas en torno al Sol).

Se enseña el cálculo como un aparato algorítmico, la derivada por ejemplo, se presenta como la "regla de los cuatro pasos" y se apoya en el empleo de fórmulas para derivar, inhibiendo de este modo el desarrollo de ideas propiamente variacionales. Es decir, a pesar de que la derivada surge como una herramienta para el estudio del cambio, y con ello sirve para predecir comportamientos futuros, no obstante, el discurso escolar reduce su tratamiento a la enseñanza de técnicas de derivación y métodos de integración. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos, dejando de lado la formación de ideas esenciales sobre la derivada; en particular, no se presta atención a la formación de las ideas variacionales tan necesarias para la comprensión y uso de este concepto (Dolores, 2013).

En las investigaciones recientes sobre pensamiento y lenguaje variacional se ha encontrado que conceptos como *función*, *límite, continuidad, derivada e integral* no pueden reducirse a su definición, ni limitarse a aplicarlas en diferentes contextos cuando se está interesado en su aprendizaje. Se precisa de una verdadera ruptura con las formas algebraicas de tratamiento de estos objetos, para dar lugar a las ideas de cambio y variación. Esto ocurre desde el principio, y se puede iniciar mediante el estudio de las gráficas de funciones desde el primer momento de su enseñanza. En términos de los contenidos escolares, en la Dirección General de Bachillerato se señalan las siguientes asignaturas:

**Tabla 1** . Mapa curricular. DGB-2013, p. 7, México.

**MATEMÁTICAS IV**

| UBICACIÓN DE LA MATERIA Y RELACIÓN CON LAS ASIGNATURAS EN EL PLAN DE ESTUDIOS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Primer semestre** | **Segundo semestre** | **Tercer semestre** | **Cuarto semestre** | **Quinto semestre** | **Sexto semestre** |
| Matemáticas I | Matemáticas II | Matemáticas III | Matemáticas VI | | Metodología de la Investigación |
| Química I | Química II | Física I | Física II | Administración I | Administración II |
| Informática I | Informática II | Biología I | Biología II | Cálculo diferencial | Cálculo integral |
| | | | | Probabilidad y estadística I | Probabilidad y estadística II |
| | | | | Matemáticas financieras I | Matemáticas financieras II |
| | | | | Temas selectos de Biología I | Temas selectos de Biología II |
| | | | | Temas selectos de Física I | Temas selectos de Física II |
| | | | | Temas selectos de Química I | Temas selectos de Química II |
| Introducción a las Ciencias Sociales | | CONTABILIDAD | | | |
| RELACIÓN CON TODAS LAS ACTIVIDADES PARA ESCOLARES | | | | | |

En términos específicos, en Matemáticas IV se señala la lista de contenidos que van desde las funciones polinomiales hasta racionales y algunas trascendentes:

**Tabla 2**. Contenidos en Matemáticas IV. DGB / DCA / 2013, p. 8,México

| MATEMÁTICAS IV<br>**DISTRIBUCIÓN DE BLOQUES** |
|---|
| El programa de Matemáticas IV está conformado por ocho bloques que se enuncian con una redacción dirigida al alumnado a continuación. |
| BLOQUE I RECONOCES Y REALIZAS OPERACIONES CON DISTINTOS TIPOS DE FUNCIONES. |
| En este bloque se establecen las características matemáticas que definen las relaciones entre dos magnitudes enfatizando las de carácter funcional. |
| BLOQUE II APLICAS FUNCIONES ESPECIALES Y TRANSFORMACIONES DE GRÁFICAS. |
| En este bloque se distinguen y describen diferentes tipos de funciones matemáticas, así como operaciones y transformaciones algebraicas y/o geométricas. |
| BLOQUE III EMPLEAS FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADOS CERO, UNO Y DOS. |
| En este bloque se determinan las situaciones de un modelo de cero, uno y dos grados, empleando criterios de comportamiento de datos. |
| BLOQUE IV UTILIZAS FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADOS TRES Y CUATRO. |
| En este bloque se reconocen patrones gráficos, se describen propiedades geométricas y se obtienen soluciones de ecuaciones factorizables. |
| BLOQUE V UTILIZAS FUNCIONES FACTORIZABLES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. |
| En este bloque se efectúa un análisis comparativo de las funciones polinomiales hasta grado cuatro profundizando en el análisis de las características de los modelos lineales y cuadráticos, y se desarrollan procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos para la obtención de los ceros polinomiales, los cuales se definen como los cortes de la gráfica con el eje "x" y las raíces son las soluciones de las ecuación asociada. |
| BLOQUE VI APLICACIONES FUNCIONALES RACIONALES. |
| En este bloque se revisan las funciones Racionales y la existencia de posibles asíntotas. |

BLOQUE VII UTILIZAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

En este bloque se obtienen valores de funciones exponenciales y logarítmicas, asimismo se aplican dichos valores para modelar y resolver problemas.

BLOQUE VIII APLICAS FUNCIONES PERIÓDICAS.

En este bloque se estudian las funciones exponenciales, logarítmicas y periódicas.

En la asignatura de Cálculo diferencial, como puede verse en la figura 2, suelen presentarse nociones de función, límite y derivadas algorítmicamente. Por lo general, se concibe al cálculo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales, *a posteriori*, se les busca alguna aplicación. Esa concepción, en el mejor de los casos, propicia un buen desarrollo en los procedimientos analíticos y logra matizarlos en los dominios de las funciones; sin embargo, muchas veces se cree que aquellos procedimientos sustituyen cualquier otro tipo de procedimientos, como los intuitivos y los visuales, debido a que el estatus favorece la consideración de los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin reparar en que pueden ser construidos por los estudiantes de manera funcional para que traten con distintas clases de situaciones (Cordero, 2005).

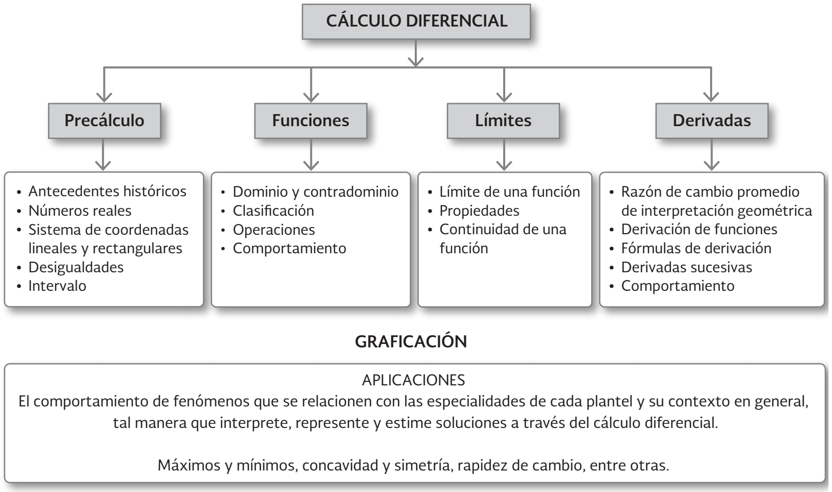
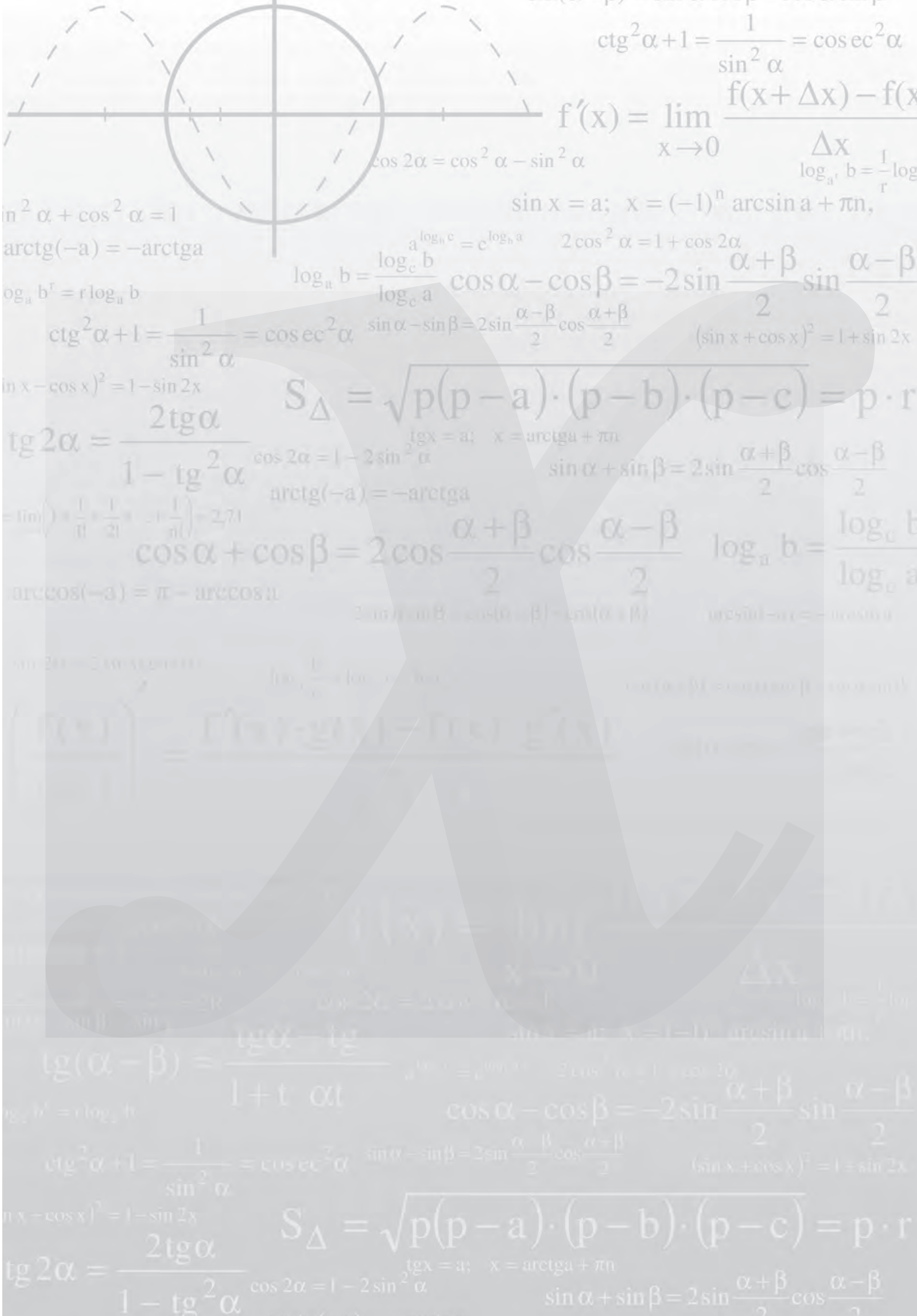



**Figura 2:** Programa de Cálculo diferencial del Bachillerato Tecnológico.

Aun cuando los nuevos programas muestran tendencias de cambio, la realidad de las clases, en el aula cotidiana, siguen siendo tradicionalistas y memorísticas. Se presenta una definición, explícita o tácita, y se enseñan los algoritmos centrales; posteriormente se ejercita hasta consolidar un nivel de logro básico. Quizá por ello dominan en la literatura recomendada, bibliografía más o menos antigua y sin una concepción activa de la enseñanza y del aprendizaje. Lo que produce un "fenómeno perverso", los programas hablan de innovación y los textos de inmovilismo. Veremos en este libro algunos ejemplos sobre este asunto: la construcción dinámica de gráficas de funciones, el cálculo de una derivada y la estimación del valor de las derivadas de orden superior. Todo ello, con la intención de que ideas variacionales sean construidas en las aulas del bachillerato mexicano.



$\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\alpha$
$f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\sin x=a;\ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}a$
$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=p\cdot r$
$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
$\mathrm{tg}x=a;\ x=\mathrm{arctg}a+\pi n$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

# 3. ALGUNOS EJEMPLOS

### 3.1 Ejemplo: La tabulación, el punteo y el trazo... ¿son suficientes?

En la enseñanza de la matemática, para construir la gráfica de una función elemental, como $y = x^2$ , es habitual empezar con la "técnica de completar la tabla y a continuación seguir con el punteo". Esto consiste en construir una tabla de valores (normalmente se dan valores enteros, unos positivos, otros negativos y el cero, distribuidos simétricamente respecto del origen: por ejemplo, se colocan en la tabla los números –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3).

En un arreglo numérico tabular esto quedaría como sigue, la última columna suele no colocarse. Con estos valores se "puntea", se localizan en el plano los puntos $(x, y)$.

**Tabla 4.** Tabular y puntear.

| $x$ | $y = x^2$ | Operaciones realizadas |
|---|---|---|
| -3 | 9 | $(-3)^2 = 9$ |
| -2 | 4 | $(-2)^2 = 4$ |
| -1 | 1 | $(-1)^2 = 1$ |
| 0 | 0 | $(-0)^2 = 0$ |
| 1 | 1 | $(1)^2 = 1$ |
| 2 | 4 | $(2)^2 = 4$ |
| 3 | 9 | $(3)^2 = 9$ |

Se colocan estos puntos en un sistema coordenado rectangular o sistema coordenado cartesiano, donde habitualmente el origen de coordenadas es el punto central. En términos generales, el estudiante no tiene una imagen previa en mente de la gráfica que obtendrá al terminar de aplicar esta técnica, una imagen *del tipo de gráfica* que se produciría, que pueda, por ejemplo, reproducir corporalmente. Se coloca sobre el cuaderno cuadriculado y se ubican los puntos $A$, $B$, ... hasta el último. Esta técnica, si bien es usual, es poco productiva en la práctica. Por ejemplo, puede dar lugar a errores como el que mostraremos en la figura 4.

**Tabla 5.** Puntos que localizar en el plano.
(Siguiendo la ruta ascendente de la ordenada).

| Puntos |
|---|
| A (-3, 9) |
| B (-2, 4) |
| C (-1, 1) |
| D (0, 0) |
| E (1, 1) |
| F (2, 4) |
| G (3, 9) |

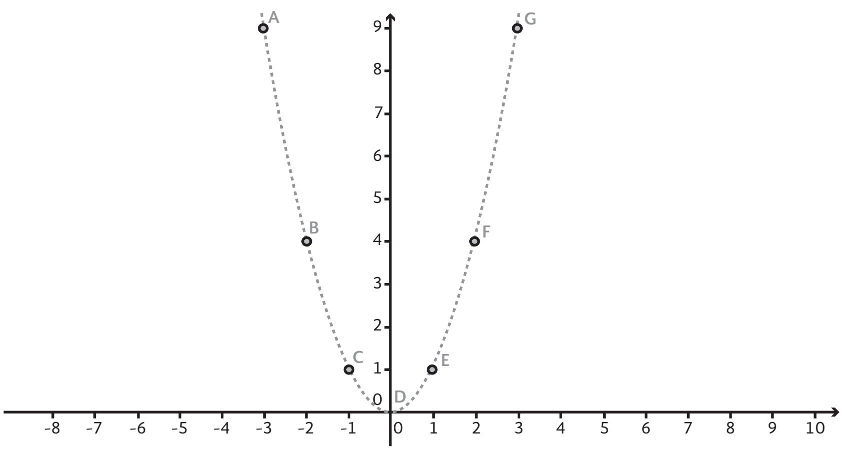



**Figura 3.** El punteo, se colocan los puntos elegidos en el plano.
(En esta figura, la gráfica de la $y = x^2$ está punteada como guía).

A continuación el estudiante une los puntos y “redondea” el trazo, para que quede como sigue:

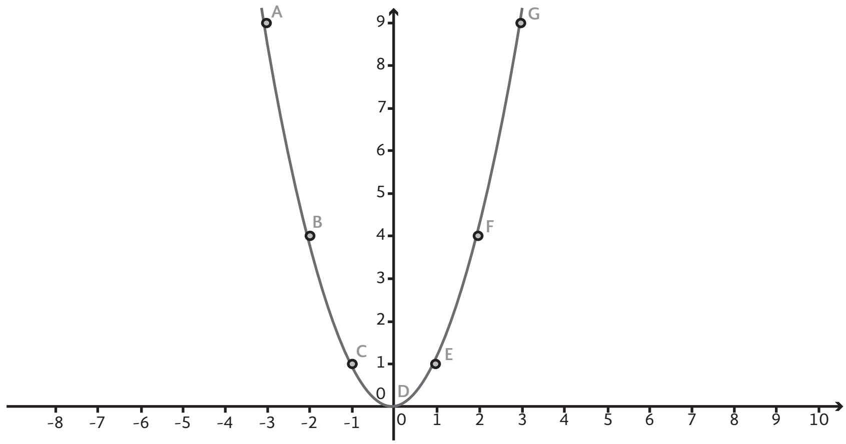



**Figura 4.** Se unen los puntos de la tabla 4 mediante una curva contigua.

En una investigación educativa, colocamos los valores de la tabla en desorden, como se muestran en la tabla de la izquierda y algunos alumnos de secundaria produjeron “cruces como agujetas de zapatos"

| Puntos | |
|---|---|
| A | (–3, 9) |
| F | (2, 4) |
| B | (–2, 4) |
| G | (3, 9) |
| C | (–1,1) |
| E | (1, 1) |
| D | (0, 0) |

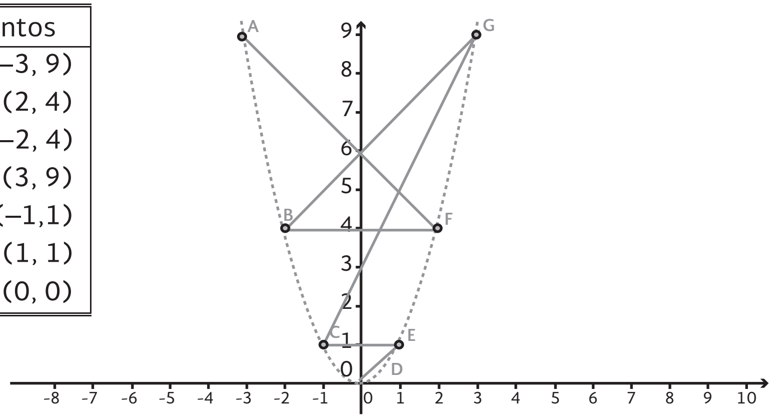



**Figura 5.** Se traza algo como “cruce de agujetas”. (Uniendo los puntos en el orden, A, F, B, G, C, E, D)

Para que el estudiante de este nivel pueda utilizar adecuadamente las gráficas en el desarrollo de su propio pensamiento matemático, se precisa de algo más que la tabulación, el punteo y el trazo. Es necesario que construya un universo de formas gráficas a las que él o ella pueda realizarles transformaciones a voluntad. Sólo de este modo las hará útiles. Ellos deben conocer de las funciones polinomiales al menos las tres básicas: las lineales, las cuadráticas y las cúbicas, pues con estas tres los temas del crecimiento de funciones, los extremos (máximo y mínimo), la concavidad e inflexiones serán plenamente cubiertos. Para ello es preciso que sepan distinguir el efecto sobre la gráfica que tienen los valores de los parámetros a, *b*, c y *d* correspondientes. Pero sobre todo, el papel que tienen sobre la posición y forma de la gráfica, las regiones de crecimiento o de decrecimiento, la localización de máximos y mínimos, o regiones de concavidad o convexidad, los puntos de inflexión. Sólo así, estas ideas resultarán útiles para el Cálculo diferencial e integral.

| FUNCIÓN LINEAL | FUNCIÓN CUADRÁTICA | FUNCIÓN CÚBICA |
|---|---|---|
| $f(x) = ax + b$ | $f(x) = ax^2 + bx + c$ | $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ |
| La recta | La parábola | La cúbica |

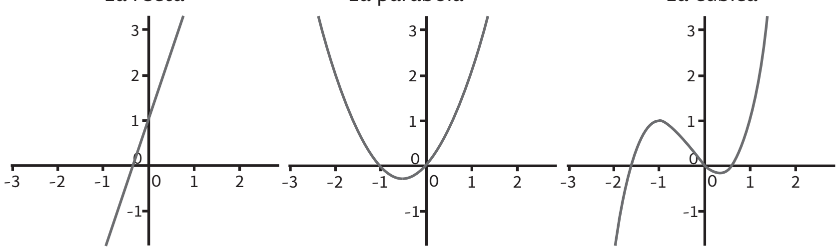



**Figura 6.** Funciones polinomiales de grado 1, 2 y 3.

Veamos a continuación un ejemplo de cómo construir la parábola y otros sobre cómo incorporar estas ideas al cálculo.

### 3.2 Ejemplo: La parábola... una ¿"operación" entre rectas?

La función $f(x) = x^2$ puede obtenerse por medio de una multiplicación, es decir, interpretándola como el producto de dos funciones lineales particulares $y = x$ y $y = x$, esto es: $f(x) = x \times x$. Pensemos en la gráfica de la función $g(x) = x$:

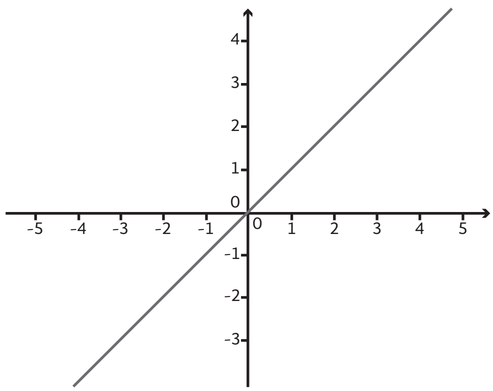



**Figura 7.** Gráfica de $g(x) = x$.

Si en el primer cuadrante la función $g$ es positiva y la multiplicamos por sí misma, el resultado será positivo. Por otra parte, en el tercer cuadrante la función $g$ es negativa, y al multiplicarse por sí misma, el resultado será positivo. Por lo tanto, nuestra función $f$ se encontrará en el primer y segundo cuadrantes, además, si pensamos en $f(x)= x^2$, tenemos una raíz de multiplicidad dos en el origen: en el punto 0 $(0, 0)$. Con lo anterior, es claro que nuestra gráfica tendrá el siguiente aspecto:

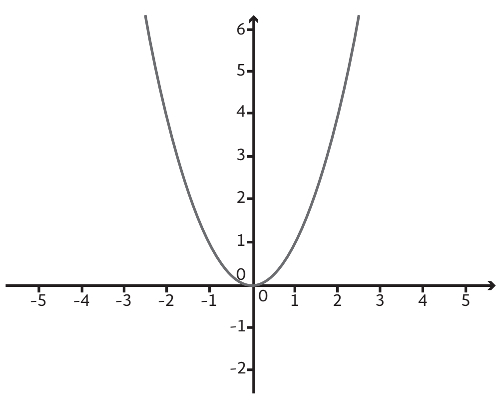



**Figura 8**. La parábola $f(x) = x^2$.

Pensemos ahora en situaciones más generales, digamos funciones lineales de la forma $g(x)=ax+b$. Por ejemplo, para graficar $f(x)=(x-2)(x-4)$, comenzamos por graficar los términos del producto, las funciones lineales que representan líneas rectas en el plano, enseguida analizar ciertas regiones, y por último hacer un bosquejo de la gráfica del producto, "la multiplicación" de $y=x-2$ con $y=x-4$.

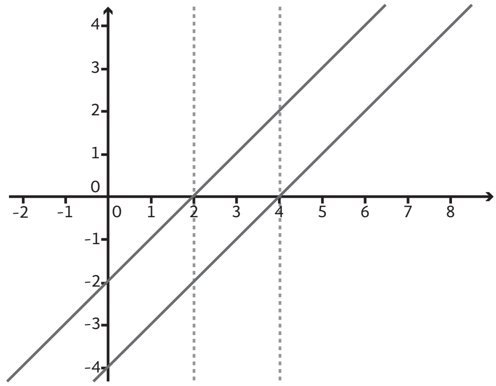



**Figura 9**. Análisis por regiones.

Una vez que grafiquemos las rectas por separado localizamos sus raíces, podemos marcar líneas perpendiculares al eje $x$ (como en la figura) para marcar las regiones de análisis. Podemos resumir el análisis en los siguientes puntos:

- Hasta antes de la raíz $x=2$ ambas rectas son negativas, por lo tanto su producto será positivo. Se sombrea la parte positiva.
- Entre las raíces $x=2$ y $x=4$ una recta es positiva y otra es negativa, por lo tanto su producto es negativo. Se sombrea la parte negativa.
- Después de la raíz $x=4$ ambas rectas son positivas, por lo tanto su producto es positivo. Se sombrea la parte positiva.
- Tanto la raíz $x=2$ y $x=4$ son de multiplicidad $1$, por lo tanto su cruce con el eje $x$ es como el de una recta.

Un bosquejo de la gráfica del producto quedaría entonces como la siguiente:

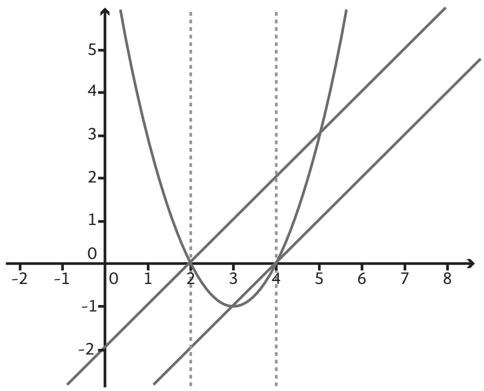



**Figura 10.** "Multiplicación" de dos rectas mediante el análisis de regiones (Cantoral, Montiel, 2001). (En verdad se multiplican dos funciones lineales, no las rectas).

En estos ejemplos resulta muy importante analizar las características analíticas de las funciones involucradas. Por ejemplo, para el primer caso, se "multiplicaron dos rectas" (en verdad se multiplicaron dos funciones) con pendiente positiva, y como resultado del producto obtuvimos una parábola que abre hacia arriba (concavidad positiva). ¿Cómo será la parábola resultante de una multiplicación de dos rectas cuya pendiente es negativa? Puedes hacer pruebas en lápiz y papel, y posteriormente en calculadora, con el fin de comprobar tus hipótesis. ¿Cómo será la parábola si una recta tiene pendiente positiva y la otra negativa? ¿Por qué?

### 3.3 Ejemplo: Un ejemplo sobre derivadas y... tangencias

Consideremos una función $f$ que sea derivable en todos sus puntos. Desarrollemos en torno del punto $x$ con un incremento $h$ a la función para obtener lo siguiente:

$$f(x+h) = a(x) + b(x)h + c(x)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

Si escribimos los coeficientes del desarrollo anterior en términos de derivadas sucesivas de la función $f$, tendremos que cada coeficiente es una de las derivadas en orden ascendente:

$$f^{(0)}(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Si ahora reescribimos (desarrollamos) esta serie en torno de $x - a$, tendremos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

De manera tal que una forma de encontrar las derivadas sucesivas de una función en un punto, consiste en desarrollar en serie de potencias en torno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo, cómo operan estas ideas.

Consideremos la función dada por la expresión $f(x) = x^3$, de la cual queremos tener la derivada en $x$. Tenemos que elegir $f(x + h)$ y desarrollarlo en serie de potencias como en la ocasión anterior, en este caso es $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, que es equivalente con:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

Por tanto, igualando las dos expresiones, tendremos:

$$f(x) = x^3; f'(x) = 3x^2; f''(x) = 6x, f'''(x) = 6, f^{(4)}(x) = 0, \ldots$$

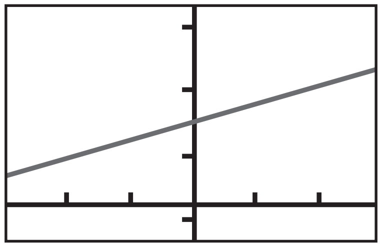
De modo que, si consideramos la definición usual del bachillerato y esta última, tendremos dos procedimientos para obtener la derivada, una es la derivada de A. Cauchy y la otra la de J.L. Lagrange. La primera es más usual en la enseñanza inicial, tanto en bachillerato como en los primeros cursos de universidad, mientras que la segunda es más usada en el nivel superior. La versión escolar de la derivada es mejor conocida como la “regla de los cuatro pasos”.

| *Derivada de Cauchy* | *Derivada de Lagrange* |
|---|---|
| Límite del cociente incremental | Coeficiente lineal en el desarrollo de serie |
| $f'(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ | $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$ |

**Figura 11.** De Cauchy a Lagrange (Cantoral y Mirón, 2000).

Con esta base, tomando la idea de J. L. Lagrange realizamos una experiencia educativa en una bachillerato de la Ciudad de México (Cantoral y Mirón, 2000). El ejercicio consistía en una serie de actividades que utilizaban la calculadora graficadora (ahora puede usarse cualquier software libre con capacidades gráficas como GeoGebra. Mostramos una sola actividad.

**Actividad 12.** Se les propone, en papel impreso, una imagen con la ventana que se exhibe a continuación, una recta y un punto sobre ella y sobre el eje $y$.



$y - x + 2$

(0,2)

**Figura 12.** Recta y punto de tangencia.
(Cantoral y Mirón, 2000).

Como datos, se les dan las coordenadas de un punto sobre el eje de las $y$ en el que se quiere colocar una parábola de modo que ésta tenga con la recta un punto de tangencia en el sitio indicado. Los estudiantes, primero de manera autónoma, luego en pequeños grupos de tres alumnos tendrían que "mover", a decir verdad tendrían que coordinar los movimientos de la parábola sobre la pantalla de cristal líquido de una calculadora mediante la asignación a voluntad de los parámetros $a$, $b$ y $c$ de la función cuadrática... justo hasta hacerla coincidir con la recta de manera, y en esto consistía el verdadero problema de la tarea, que el contacto fuera efectivamente tangencial. Digamos que estaban derivando sin derivar... ¿Por qué? ¿Qué opina usted?

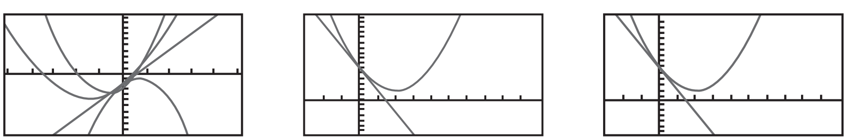


**Figura 13.** Ensayos de respuesta de los estudiantes (Cantoral y Mirón, 2000).

## 3.4 Ejemplo: De las derivadas sucesivas a la derivada

Veamos, mediante ejemplos, una propuesta más ligada al cálculo diferencial, de los problemas que hemos planteado sobre visualización y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Diseñamos un conjunto de cuatro tareas relacionadas unas con otras. Les proponemos una colección de cuatro gráficas idénticas, como la que se muestra enseguida, y les pedíamos que utilizaran una gráfica para cada inciso, de modo que deben marcar sobre la gráfica la porción en la que se cumpla sólo uno de los siguientes cuatro incisos:

1) $f(x)>0$,
2) $f'(x) > 0$,
3) $f''(x) > 0$,
4) $f'''(x) > 0$.

Esperamos que sus respuestas nos indiquen las estrategias variacionales que utilizan y las formas en cómo argumentan su elección frente a sus compañeros de clase. Claramente, como hemos comprobado, la pregunta más compleja para ellos resulta ser la última, pues es ahí donde se exige el uso de estrategias variacionales como única posibilidad de solución del problema.

**Pregunta 1**. Marca sobre la gráfica de la función $f$, que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f(x) > 0$.

Gráfica de $y = f(x)$

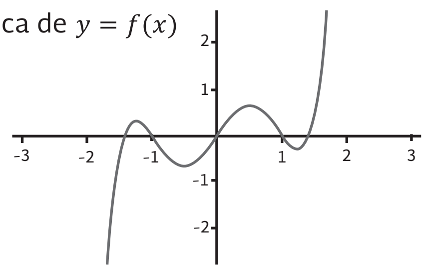



**Figura 14.** Regiones sobre la gráfica $f$.
(Cantoral y Farfán, 1998).

En este caso, los estudiantes suelen recordar, basados en su enseñanza previa, que la ubicación en los cuadrantes I, II, III y IV determina el signo de la imagen de la función; de modo que las ordenadas positivas estarán en los dos primeros cuadrantes, mientras que las negativas en los restantes. De ahí que contesten esta cuestión con relativa facilidad.

**Pregunta 2**. Marca sobre la gráfica de la función $f$, que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'(x) > 0$.

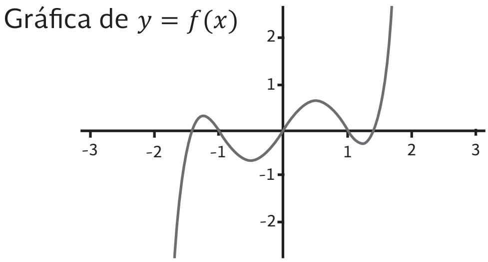



**Figura 15.** Regiones sobre la gráfica $f$
(Cantoral y Farfán, 1998).

Los estudiantes, en esta oportunidad, confunden con frecuencia el signo de la derivada con el de la función, o en otro caso, recuerdan que las pendientes de las tangentes a la curva determinan el signo de la derivada, de modo que se tendrá para pendientes positivas correspondientes derivadas positivas. Este cambio de registro, la pregunta planteada en el contexto simbólico con apoyo visual y la respuesta construida en el contexto visual resulta más complicado para los estudiantes y se expresa en dos sentidos, por un lado la proporción de respuestas acertadas es bajo y por otro las explicaciones que utilizan son escasas y evidentemente escuetas.

**Pregunta 3**. Marca sobre la gráfica de la función $f$, que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f''(x) > 0$.

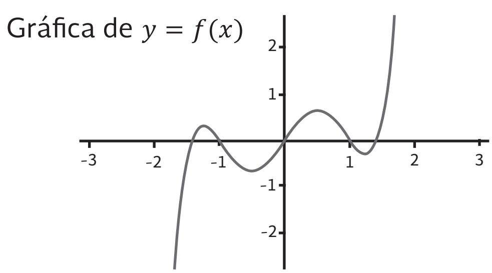



**Figura 16.** Regiones sobre la gráfica $f$
(Cantoral y Farfán, 1998).

Como podíamos prever, ahora la situación resultaría más compleja. Pues exige de niveles progresivos de abstracción. El recurso dominante en las respuestas de los alumnos resulta ser la memoria. Puesto que ellos suelen recordar que la segunda derivada positiva se corresponde con la concavidad hacia arriba, en tanto que la concavidad hacia abajo está asociada con la segunda derivada negativa. Aunque no dispongan de explicación alguna para confirmar su razonamiento, pueden contestar la pregunta. A juzgar por el análisis que hemos hecho de sus respuestas no se desprende la existencia de algún otro argumento que permita enfrentar la situación planteada. De hecho, es usual entre los alumnos disponer de un método mnemotécnico para establecer estas correspondencias, “es cóncava hacia arriba entonces retienen más agua, si lo es hacia abajo retendrá menos agua, de hecho tirará el agua”. Este símil con una cubeta llena de agua puede aparecer como una estrategia para refrescar la memoria. Naturalmente ello no parece implicar estrategias propiamente variacionales.

La última de las cuestiones ponía en evidencia este hallazgo, pues se trata de una situación en la cual no es posible recordar algún conocimiento previo, pues el tema no ha sido tratado en su enseñanza convencional.

**Pregunta 4**. Marca sobre la gráfica de la función $f$, que aparece enseguida la porción que consideres cumple con la condición $f'''(x) > 0$.

Gráfica de $y = f(x)$

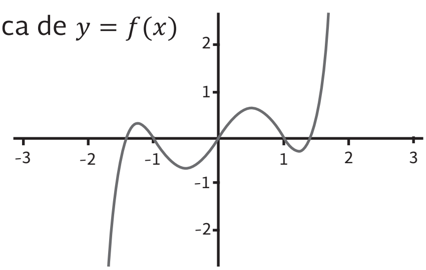
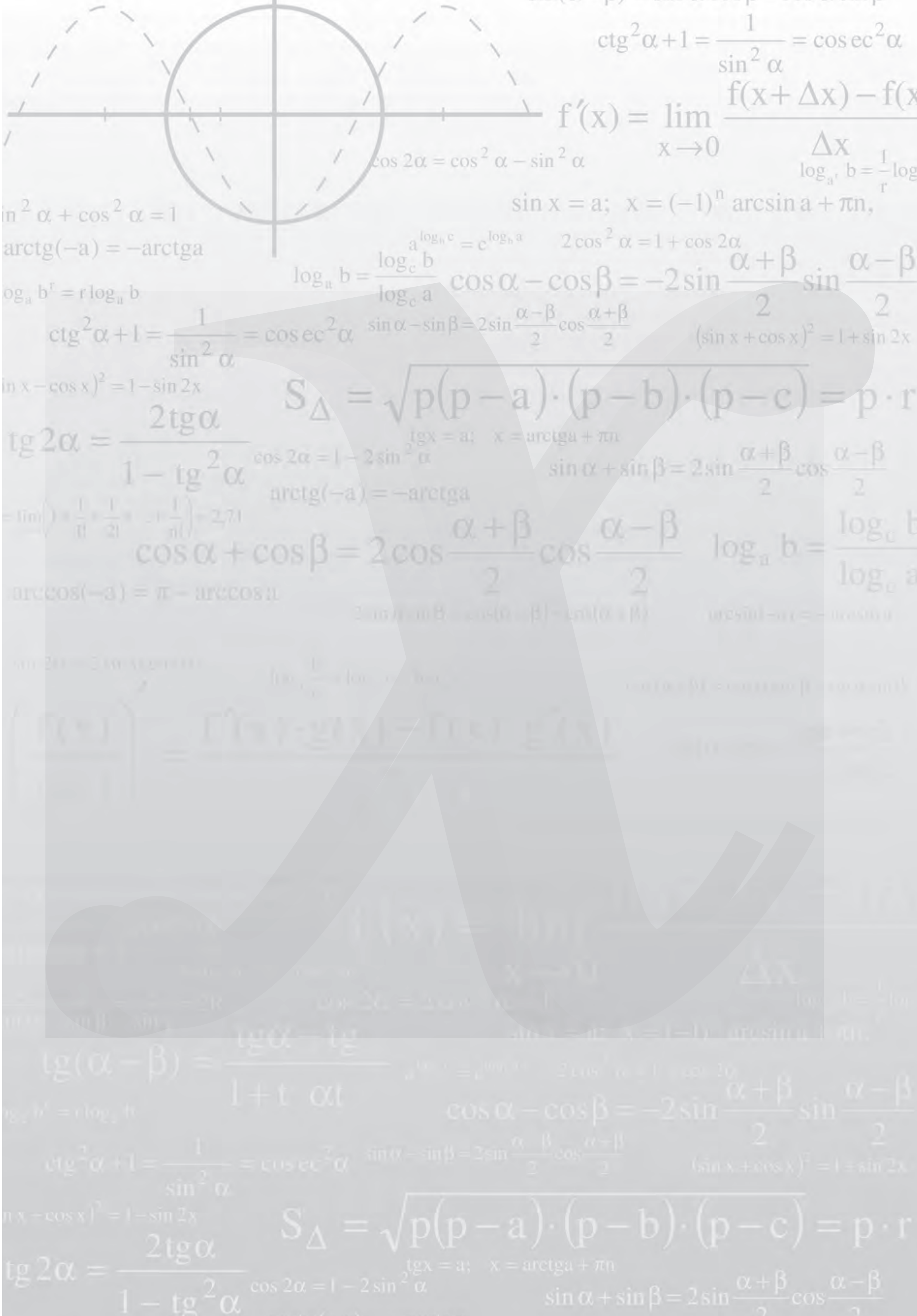



**Figura 17.** Regiones sobre la gráfica $f$
(Cantoral y Farfán, 1998).

Esta pregunta suele plantear un reto especial, tanto a los estudiantes como a los profesores, pues aunque entienden efectivamente el enunciado del problema, no pueden construir una respuesta que les parezca convincente. Esta dificultad se agudiza si en la pregunta elevamos el orden de la derivada involucrada, dado que se carece de elementos cognitivos y didácticos que les permitan construir una respuesta adecuada. Consideramos que es hasta este momento en que ellos se encuentran en situación de aprendizaje, ya que la serie de tareas anteriores les permiten, aunque fuese sólo con recursos mnemotécnicos, dar una respuesta a las preguntas planteadas. Empero la cuarta cuestión plantea una problemática no prevista por ellos, el éxito en la pregunta radica en poder descifrar los códigos variacionales y articularlos en signos variacionales, pues la respuesta habrá de ser construida. En este momento, los estudiantes y los profesores suelen entrar en una situación de aprendizaje muy rica. Sólo quienes han dominado algunas de las estrategias del pensamiento y el lenguaje variacional pueden abordarla eficazmente. Hemos concluido, en este sentido, que el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas parece ser una condición sin la cual la formación de la idea de derivada y en consecuencia, de la noción de predicción deviene inevitablemente frágil. Para ello es que hemos propuesto y explorado el siguiente tratamiento didáctico.



$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$
$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin x = a;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg} a$
$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$
$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = p \cdot r$
$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
$\mathrm{tg}x = a;\ x = \mathrm{arctg} a + \pi n$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

# 4. UNA PROPUESTA VIABLE: LA VISUALIZACIÓN COMO RECURSO

El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida. Hace énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, 2004).

La expresión *cambio* se entiende como una modificación de estado, en tanto que el vocablo *variación* la entendemos como cuantificación de dicho cambio. No obstante, la construcción del concepto de variación es un proceso difícil y lento, pues requiere la integración de distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, así como una adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro, función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de *cambio* y la *variación*.

El estudio del cambio sirve para entender sus efectos en diversos fenómenos, pero este interés se deriva de la necesidad de predecir, inherente al ser humano. Ante la incapacidad de poder adelantar el tiempo para observar los resultados de los acontecimientos, se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio para lograr anticipar el comportamiento de sistemas complejos, de tal modo que la idea de predicción se vuelve una herramienta fundamental en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos, y que al igual que el pensamiento variacional, se construye socialmente a partir de las vivencias y experiencias de los individuos y grupos sociales (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Una revisión de la literatura especializada sobre el tema de visualización y graficación de funciones reales de variable real nos permite extraer que, en esencia, son dos las formas clásicas de entender a la enseñanza de la graficación de las funciones de $\Re$ en $\Re$; una, la más difundida en el medio educativo, asume que la graficación es una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función particular, y otra, menos difundida, que entiende a la graficación como una forma de interpretar el sentido y significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva. Existen, sin embargo, posturas intermedias, al nivel de propuestas de enseñanza, en las que se acepta que esas dos visiones están estrechamente relacionadas. Ello obedece quizá al hecho de que los niveles del desarrollo del pensamiento matemático requieren de la visualización en distintos grados y en esa medida la graficación de funciones se torna un medio adecuado para lograrla.

De manera que si pensamos en la graficación como una forma de tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones, podremos ocuparnos de contestar algunas preguntas que permiten describir cómo es que los jóvenes y los adultos perciben dicho universo, o bien saber cuáles códigos usan para descifrar y procesar la información visual que éstos contienen. Estas preguntas han preocupado a los investigadores de la matemática educativa desde hace algunas décadas. Estos acercamientos planteaban la necesidad de construir nociones nuevas que dieran cuenta de la forma en que las personas se relacionan con su espacio y surgen así nociones como visualización y percepción espacial. Ello condujo a explorar la clase de las habilidades visuales que se necesitan para aprender geometría o análisis matemático, por ejemplo.

Desde la perspectiva desarrollada por Jean Piaget, quien exploró la concepción de espacio que desarrollan los niños, así como la noción de geometría que evoluciona entre ellos al describir las actividades representacionales del espacio. Esto fue entendido como la imagen mental del espacio real en el cual los niños actúan, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria, sino mediante una reconstrucción activa de un objeto en un nivel simbólico. En este sentido, las investigaciones estuvieron interesadas en las transformaciones mentales del espacio real en el espacio de representaciones del niño, en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con la edad. De acuerdo con la teoría de Piaget, las primeras transformaciones del niño son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos, tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de curvas. Sólo después, según las investigaciones piagetianas, el niño está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, tales como longitud de las líneas o tamaño de los ángulos. Es ahí donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos.

Una cuestión importante ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, trata de la visualización en las matemáticas. Generalmente se entiende por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido, se trata de un proceso mental demasiado útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico. En matemáticas se utilizan diferentes representaciones que requieren de la visualización; por ejemplo, en las propiedades de inclusión en la teoría de conjuntos suele hacerse uso de dibujos como el siguiente para describir el caso en que el conjunto *A* queda contenido en el conjunto *B*.

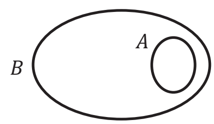
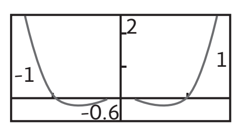



**Figura 18.** $A \subset B$. Se dice también que $A$ es subconjunto de $B$.

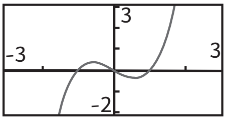
En el análisis de las funciones, por su parte, es usual tratar con representaciones visuales, exhibir, "dejar ver", propiedades como la paridad $f(x) = f(-x)$, periodicidad $f(x) = f(x+k)$, o para realizar traslaciones $y = f(x + a)$, $y = f(x - a)$, y así muchas más propiedades. En estos casos, el apoyo del recurso gráfico permitirá una caracterización más completa de ciertas propiedades, como puede verse en las siguientes figuras.

| Caracterización analítica de una función par: | Ejemplo de una función par en particular: | Caracterización gráfica de función par |
|---|---|---|
| $f(x) = f(-x)$ | $f(x) = x^2(x^2 - 1)$ |  |



Estas caracterizaciones de la paridad de una función se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos posteriores. Por ejemplo, si $f$ es una función par definida sobre $(-a, a)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

| Caracterización analítica de una función impar: | Ejemplo de una particular función impar: | Caracterización gráfica de función impar |
|---|---|---|
| $f(x) = -f(-x)$ | $f(x) = x(x^2 - 1)$ |  |

Estas caracterizaciones de la *imparidad* de una función, se utilizan para deducir y explicar resultados teóricos posteriores. Por ejemplo $f$ es una función impar definida sobre $(-a,a)$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

**Figura 19**. Caracterizaciones visuales y analíticas de la paridad e imparidad (Cantoral, Montiel, 2001).

Diversas posturas teóricas han hecho su aparición en Matemática Educativa, el papel de la visualización ha cobrado progresivamente relevancia en el aprendizaje y en la formación matemática de los estudiantes (Acuña, 2013). En nuestras investigaciones desde años atrás habíamos encontrado una fuerte correlación entre la habilidad para procesar información visual con la capacidad de analizar información analítica relevante en el campo del precálculo, la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral y el análisis matemático. Estuvimos interesados en analizar la manera en que los estudiantes abordan problemas como los siguientes:

## TEST – Socioepistemología en Matemática Escolar

1. Considere a las variables reales $x$ e $y$. Suponga que ambas variables representan números positivos. Demuestre entonces que la ecuación $x^y = y^x$ tiene una infinidad de soluciones reales, pero que sólo dos son soluciones enteras (es decir donde tanto $x$ como $y$ sean enteros), tales que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$

2. Considere la recta que aparece en la figura 20 A siguiente. Imagine que el origen de coordenadas funciona como un pivote que permite a la recta “girar” sobre ese punto. Suponga que gira a la recta en el sentido “antihorario” y mide el ángulo que puede girar sin que

deje de representar a una función respecto de $x$. Digamos que si la recta gira menos de 45°, entonces seguirá siendo una función de $x$. La pregunta es ahora, hasta cuánto podría girar la parábola que aparece en la figura 20 B en el mismo sentido "antihorario", pero de manera que siga siendo una función de $x$.

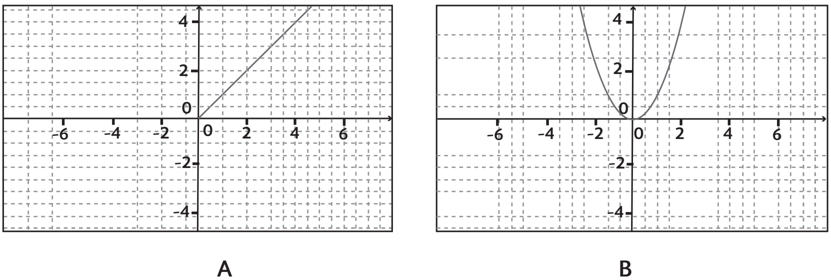


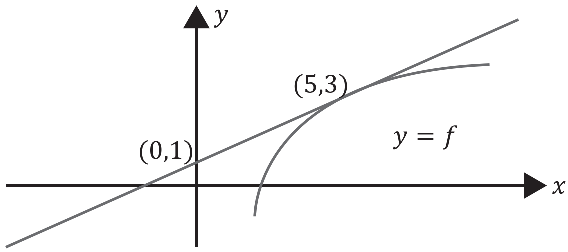

**Figura 20.** Visualizado... ¡un reto! (Cantoral y Montiel, 2001).

En todos los casos resueltos por estudiantes y profesores ante la pregunta 1, encontramos una serie de patrones comunes al analizarlas. Regularmente intentaban despejar la $x$ o la $y$, esto era técnicamente imposible por la estructura del problema $x^y = y^x$. Una variable de control en el diseño, fue colocar a las variables como "no despejables", de este modo se verían forzados a utilizar estrategias alternativas de solución en sus respuestas. Una vez que abordaban la actividad bajo este esquema tenían el asunto de los cuantificadores, de todas las soluciones, sólo queremos las que cumplan con una condición. Este manejo lógico de enunciados eleva considerablemente la complejidad de la tarea.

Con la segunda actividad: "rotar" la recta y la parábola, se quería justamente lo inverso que en la tarea anterior, que el libre enunciado no permitía algebrizar la tarea, en este sentido debían imaginar los giros y emularlos con el movimiento de su propio cuerpo. Las respuestas de los estudiantes ponían en evidencia razonamientos sorprendentes, al nivel de los profesores ésta resulta una tarea didácticamente muy enriquecedora. Discute nuestra mirada visual a través de "ventanas prototípicas"

En ese sentido, una propuesta más para la exploración específica fue presentada a estudiantes del bachillerato y primer año de universidad, en ella se disponía de un conjunto de preguntas en las que se afirmaba que la mayoría de los estudiantes presentarían dificultades. Lo reproducimos a continuación a fin de que ustedes intenten resolverlo e inviten a sus alumnos o a sus colegas a realizar esta actividad y adaptándola al nivel escolar en el que se encuentren.

**Test donde la mayoría de los estudiantes de cálculo fallan**. Tomado de *Visualization in teaching and learning mathematics* (1991) de W. Zimmermann y S. Cunningham en notas de la MAA número 19, pp. 25–26.




1. Suponga que la recta $L$ es tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(5,3)$ como se indica abajo. Encuentre $f(5)$ y $f'(5)$.

2. ¿Por qué es $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} - 2$ obviamente incorrecta?

3. Encuentre la pendiente máxima de la gráfica de $y = -x^3+3x^2+9x-27$.

4. Evalúe $\int_{-3}^{3} |x+2|dx$

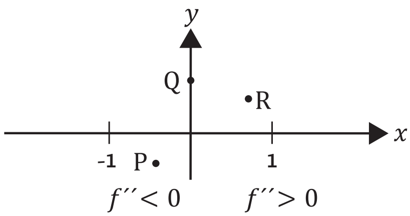
5. Usando la gráfica de $dy/dx = f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, bosqueje la gráfica de la función $y = f(x)$

6. Si $f$ es una función impar sobre $(-a, a)$, evalúe $\int_{-a}^{a} \left(b + \left(f(x)\right)\right) dx$.

7. Sea $f(x) = \begin{cases} ax & x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1 & x > 1 \end{cases}$ encuentre $a$ y $b$ tales que sea $f$ sea derivable en 1.

8. En el diagrama P, Q y R son puntos sobre la gráfica de $f$. Para todo $x$, $-1 < x < 0$, $f''(x) < 0$ y para toda $x$, $0 < x < 1$, $f''(x) > 0$. Si la derivada de $f$ en $[-1, 1]$ existe, ¿cuál de lo siguiente debe ser correcto?

**Test sobre visualización (Zimmermann, Cunningham. 1991).**




A) $f'(0)=0$.
B) $f$ tiene un máximo en $x = 0$.
C) $f$ tiene un mínimo en $x = 0$.
D) Existe un número $c$, $-1 < c < 0$ para el cual $f$ tiene un máximo.
E) Existe un número $d$, $0 < d < 1$ para el cual $f$ tiene un máximo.

9. Dada $f$ una función derivable, tal que $f(-x)=-f(x)$. Entonces para cualquier a:
A) $f'(-\mathrm{a}) = -f'(-\mathrm{a})$
B) $f'(-\mathrm{a}) = f'(\mathrm{a})$
C) $f'(-\mathrm{a}) = -f'(\mathrm{a})$
D) Ninguna de las anteriores.

10. Suponga que $f$ es una función continua. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

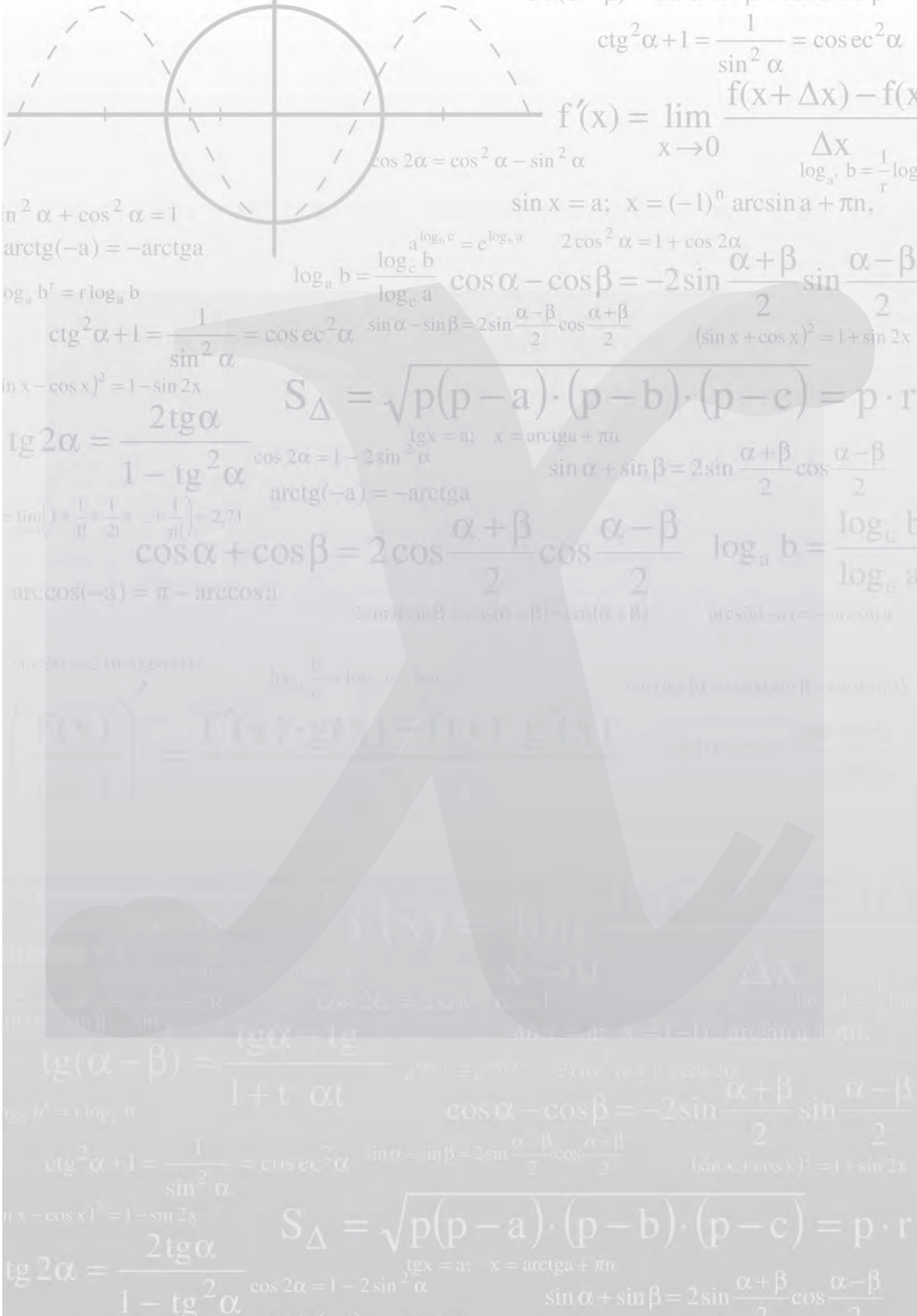
A) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a-k}^{b-k} f(x)dx$

B) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_a^b f(x+k)dx$

C) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x)dx$

D) $\int_a^b f(x-k)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x+k)dx$

E) Ninguna de las anteriores.



# 5. ALGUNAS SUGERENCIAS... ¿USTED QUÉ HARÍA?

A partir de ahora nos estaremos refiriendo a diseños experimentales que fueron puestos en funcionamiento en diferentes escenarios educativos, pero siempre con estudiantes y profesores mexicanos de diversos sistemas y subsistemas. En primer término trataremos el papel de la derivada de una función, en González (1999) se aborda la derivada, asumiendo que para su enseñanza no resultará suficiente con dotarle de significado a la *primera derivada*. La hipótesis del trabajo sostuvo que la noción de derivada surge hasta que se estabiliza entre los estudiantes una articulación de las *derivadas sucesivas* y se establece un tratamiento de "ida y venida" entre las funciones y sus derivadas. Veamos un ejemplo:

Problema II.1 A continuación se muestra una tabla que contiene la tabulación de dos funciones cualesquiera.

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ |
|---|---|---|
| -0.65 | 0.000 | 0.293 |
| -0.60 | 0.032 | 0.247 |
| -0.55 | 0.098 | 0.201 |
| -0.50 | 0.173 | 0.173 |
| -0.45 | 0.202 | 0.142 |
| -0.40 | 0.250 | 0.100 |
| -0.35 | 0.301 | 0.140 |
| -0.30 | 0.323 | 0.272 |
| -0.25 | 0.400 | 0.400 |
| -0.20 | 0.423 | 0.457 |
| -0.15 | 0.451 | 0.538 |

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ |
|---|---|---|
| -0.10 | 0.510 | 0.541 |
| -0.05 | 0.521 | 0.552 |
| 0.00 | 0.500 | 0.560 |
| 0.05 | 0.461 | 0.568 |
| 0.10 | 0.358 | 0.600 |
| 0.15 | 0.252 | 0.618 |
| 0.20 | 0.192 | 0.622 |
| 0.25 | 0.161 | 0.650 |
| 0.30 | 0.142 | 0.673 |
| 0.35 | 0.062 | 0.682 |
| 0.40 | 0.010 | 0.701 |

Nota: es importante que observes que la tabla derecha es la contiuación de la tabla izquierda.

Ahora contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.50$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.25$?

¿Cuál de las dos funciones tiene el valor más grande de la derivada en $x = 0.20$?

Es importante que expliques tus respuestas (González, 1999).

**Figura 21.** Estimando a $f'(x)$ (González, 1999).

La primera actividad muestra una tabla numérica con los valores de dos funciones, con la que se pretende dar inicio al análisis de la derivada a partir del estudio de sus diferencias. Se pregunta por el mayor valor (aproximado) posible de la derivada en algunos puntos, para lo cual se requiere del uso de una estrategia variacional de *comparación*, pues el estudiante analizará el valor de la función en dos puntos vecinos, para establecer las diferencias.

Problema II.3 A continuación se muestran las gráficas de varias funciones. Todas se intersectan en el mismo punto, decide cuál de ellas tiene derivada mayor en el punto $x = 1$. Es importante que expliques tu respuesta.

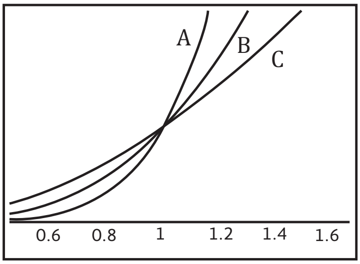



**Figura 22.** Estimaciones visuales de las derivadas (González, 1999).

En esta actividad se cuestiona por la gráfica de la función que tiene el mayor valor aproximado para la derivada en el punto particular, el punto de intersección, y dadas las características de las gráficas no bastará con saber “al ojo” el signo de la derivada. A diferencia del problema anterior, éste se desarrolla en un contexto gráfico con la intención de que las argumentaciones del alumno no se basen en aritmética ni álgebra, sino sean del tipo cualitativo.

Problema II.4 De la siguiente figura contesta la siguiente pregunta $f'(b) > f'(a)$.

Explica tu respuesta.

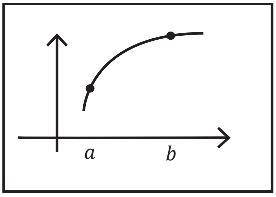


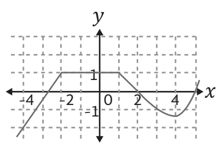

**Figura 23.** Comparación de la derivada de $f$ en dos puntos (González, 1999).

En este problema se pretende que el estudiante compare los valores de la derivada de una función en dos puntos a partir de una misma gráfica de una función, comparando las inclinaciones de las tangentes, o bien, analizando su variación sobre la gráfica. Los resultados de la implementación de las actividades muestran que los estudiantes recurren principalmente a elementos memorísticos, algorítmicos y mecánicos debido a que no tienen escenarios para significar a la derivada.

El diseño siguiente, del que mostramos dos casos, se propone afianzar la relación entre función y derivada, teniendo como eje el pensamiento y lenguaje variacional, de manera que construyan relaciones entre el concepto de derivada y el comportamiento de una función. En el escrito se presentan cuatro de las ocho actividades:

**Actividad 1**

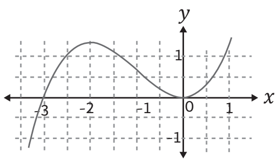
La gráfica muestra el comportamiento de la función $y = f(x)$. Analice la gráfica y conteste:




a) ¿Cuánto cambia $f$ si $x$ cambia de $-4$ a $-2$?
b) ¿Cuánto cambia $f$ si $x$ cambia de $2$ a $3$?
c) ¿Cuánto cambia $f$ si $x$ cambia de $-1$ a $1$?
d) Si $x$ cambia de izquierda a derecha, para qué valores de $x$ se cumplen las desigualdades siguientes?
$f(x+\Delta x) - f(x) > 0;\ f(x+\Delta x) - f(x) < 0;\ f(x+\Delta x) - f(x) = 0$

**Actividad 7**

Dada la gráfica de $y = f(x)$,




a) Determine el signo de la derivada en $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ y $x = 0$
b) ¿En esos valores de $x$, la función crece o decrece?

**Figura 24.** Relaciones entre $f$ y el signo de su derivada (Enegler, *et al.* 2008).

Algunos otros diseños, utilizan recursos tecnológicos, si bien conceptualmente no plantean análisis teóricos diferentes, sí brindan una mirada alternativa en tanto que analizan el papel que los entornos producen en los aprendizajes, un ejemplo interesante se emplea en (Briceño, Cordero, 2010), veamos una variante de la situación.

**Escena 2: Modelado de movimiento.** Se presenta la tecnología a trabajar (calculadora gráfica y sensor de movimiento) y se explica su funcionamiento, posteriormente se escoge un niño al azar y se le indica hacer movimientos de un punto P1 a P2 como se muestra en la figura B. Se les indica a los participantes que deben de estar en una posición de espalda al sensor y caminar en linea recta.

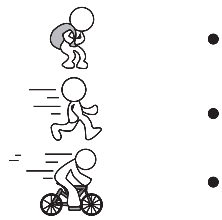


**Figura A.** Escena 1. Interpretación del movimiento

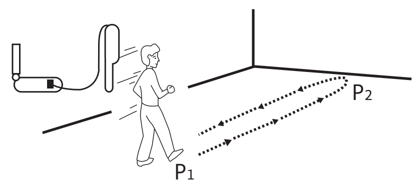



**Figura B.** Indicación del movimiento con la tecnonogia

Después de la simulación del movimiento se les hace ver que la gráfica del movimiento que se obtuvo tiene el parecido a una montaña, (ver figura A). Entonces se les pregunta ¿Cómo se tendría que mover ahora para que con el uso tecnológico dibuje una montaña mas alta? (ver figura B)

**Figura 25.** Relaciones entre $f$ y $f'$ en experimentación (Briceño y Cordero, 2010)

Más recientemente, Caballero, (2012) propone gráficas por segmentos de un par de funciones, $f$ y $g$ con la propiedad que sus gráficas tengan un punto de intersección y la misma concavidad, con ello se busca inducir que la comparación establecida no descanse sobre un asunto exclusivamente visual, sino que ahora deban realizar inferencias basadas en valores numéricos y algebraicas. Se moviliza así una forma de variación de orden mayor. La pregunta directa consistió en lo siguiente: ¿Es $f''(a)$ mayor, menor o igual a $g''(a)$? ¿Por qué?

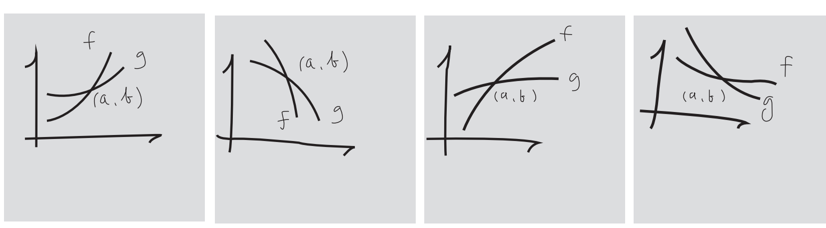



**Figura 26**. Relaciones entre $f$ y $g$ y sus segundas derivadas (Caballero, 2012).

Al nivel de *los* ejemplos finales, veremos ahora algunas consideraciones basadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) que fueron puestos en escena en un bachillerato fuera de México, en Montevideo Uruguay, se basa en el artículo Cantoral, Testa (2006). Decidimos transcribirlo casi por completo a fin de mostrar un ejemplo del reporte técnico que pueda ser reproducido en las aulas mexicanas. En su resumen se señala que se reportan los resultados de una investigación desarrollada con estudiantes uruguayos respecto del significado gráfico que asignan al valor numérico de la función derivada segunda, y de cómo influye y se desarrolla su pensamiento y lenguaje variacional al trabajar con actividades que ponen en juego dicho valor numérico. Mediante un análisis del contenido temático de los cursos correspondientes, y del enfoque curricular en su conjunto, de la bibliografía empleada y de los antecedentes de investigación, observamos que se significa gráficamente al signo del *valor numérico de la función derivada segunda*, asociándolo a *concavidad positiva o negativa*, pero no así al valor numérico en sí que esta posee. La secuencia planteada en este estudio, enfrentó al estudiante al reconocimiento de las limitaciones de la significación gráfica del signo de $f''(a)$ y generó una puesta en juego y un desarrollo de su PyLV al significar gráficamente al valor numérico de $f''(a)$.

A partir del análisis profundo, tanto del currículo como de la forma en que se trabaja el concepto matemático “derivada” en los cursos y en los libros de textos, observamos que los estudiantes uruguayos son guiados a trabajar con dicho concepto, a conocer su definición, pero únicamente con el enfoque que indica el currículo, sin poner en primer lugar una enseñanza, en el sentido de Cantoral (2000), que favorezca las distintas miradas del concepto, sus relaciones con conceptos o imágenes ya adquiridas de éstos, lo que favorecería, en nuestra opinión, la formación de una fuerte estructura conceptual.

Dada la importancia que tiene en los currículos el tema “derivadas” y sus indiscutidas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas, es que creemos que su enseñanza no puede descansar en que los estudiantes puedan “repetir” su definición o que apliquen correctamente ciertas reglas para “derivar”. A partir del análisis de los currículos se deduce que el objetivo principal de la enseñanza de este tema es realizar correctamente el estudio analítico y la representación gráfica de una función donde, en forma mecánica se determinan las funciones derivada primera y segunda. En este sentido, observamos dos aspectos que generaron nuestra investigación; por un lado este tipo de trabajo no implica que el estudiante ponga en juego su pensamiento y lenguaje variacional, por lo tanto, no posibilita el desarrollo de este tipo de pensamiento fundamental en el entendimiento relacional del tema; por otro lado, el valor numérico de la función derivada primera es significado gráficamente, relacionándolo con el coeficiente angular de la recta tangente al gráfico en el punto en cuestión, pero el valor numérico de la función derivada segunda no entra en juego en dicho enfoque, si es distinto de cero, y sólo se significa gráficamente a su signo, relacionándolo a la concavidad de la función.

Esta investigación, como otras que también forman parte de la línea Pensamiento y Lenguaje Variacional, busca determinar elementos que no están presentes en el currículo, que permitan enriquecer el concepto "derivada" así como comprender este concepto desde el punto de vista del estudiante. Nuestro grupo considera imprescindible el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional de los estudiantes para trabajar en un ambiente enriquecido los temas de cálculo; y además, en cuanto a este tema específico, distintas investigaciones; entre ellas González (1999) y Valero (2000) han mostrado que la noción de derivada se estabiliza en el pensamiento de los estudiantes sólo hasta que la noción de derivada sucesiva aparece y se establece un tratamiento articulado entre la función y sus derivadas. A partir de esta base creemos que se favorecerá este proceso si el estudiante enriquece el concepto de valor numérico de la función derivada segunda con aspectos gráficos y variacionales; es por ello que en este trabajo investigamos cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes uruguayos al valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su PyLV al trabajar en actividades que ponen en juego estos aspectos.

En los cursos de Análisis Matemático (Cálculo diferencial y Cálculo integral en México) de secundaria en Uruguay (estudiantes de 17 años aproximadamente) se trabajan los tópicos matemáticos: función, valor numérico, función derivada primera, signo de la función inicial, signo de la función derivada primera, valor numérico de la función inicial, valor numérico de la función derivada primera, función derivada segunda, signo de la función derivada segunda. Casi todos estos tópicos son significados gráficamente:

- El signo de la función inicial $f$ con el cuadrante en el cual estará contenida.
- El valor numérico de la función $f$ en $x=a$ con el punto de coordenadas $(a,f(a))$.
- El signo de la función derivada primera $f'$ con el crecimiento–decrecimiento de la función $f$.
- El valor numérico de la función $f'$ con el coeficiente angular

de la recta tangente al gráfico de la función $f$ en el punto en cuestión.

- Signo de la función derivada segunda $f''$ con la concavidad (positiva o negativa) de la función $f$.

Estos cursos tienen como objetivo principal el estudio analítico y la representación gráfica de una función dada ($f$), las funciones derivadas de ésta (función derivada primera y función derivada segunda) sólo son estudiadas como herramientas para poder graficar la función dada, pero su vinculación es sólo mediante algoritmos matemáticos en una de las vías, ($f \rightarrow f' \rightarrow f''$), y mediante representaciones geométricas en la otra vía ($f'' \rightarrow f' \rightarrow f$). La anterior situación se puede esquematizar como muestra el siguiente diagrama:

Podemos observar que:

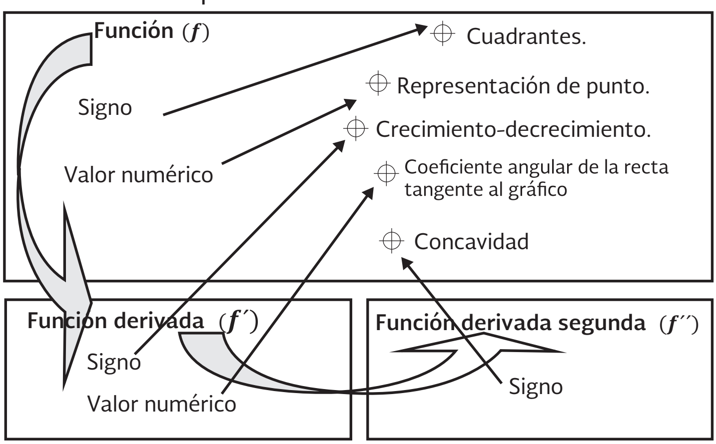



**Figura 26.** Relaciones de subida y bajada (Cantoral, Testa, 2006).

- Las vinculaciones que llamaremos "de bajada" están dadas solamente por algoritmos o técnicas de derivación y las que llamamos "de subida" sólo brindan información gráfica, o sea, las flechas curvas muestran una relación, exclusivamente algorítmica, entre $f$ y $f'$ y entre $f'$ y $f''$, y las otras flechas muestran una vinculación entre aspectos de las funciones derivadas de la inicial ( $f'$ y $f''$) y aspectos gráficos de la función inicial ( $f$ ).
- No se establecen relaciones "de subida" entre la función derivada segunda y la función derivada primera.
- No está presente el valor numérico de la función derivada

segunda, por lo tanto es imposible, en este marco, poder establecer relaciones entre este valor y la función dada, o entre este valor y la función derivada primera.

- No están presentes ningunas de las funciones derivadas de orden mayor que dos.
- No se establecen relaciones "de bajada" entre aspectos de la función, función inicial o función derivada primera ( $f$ y $f'$), con las funciones derivadas sucesivas de ellas a no ser las de orden siguiente ( $f'$ y $f''$).

En esta investigación confirmamos nuestra creencia inicial de que en la estructura conceptual asociada al concepto "derivada" de los estudiantes no estarían presentes significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda, y que el trabajar en la secuencia que creamos posibilitaría que reflexionaran sobre este tópico, que llevaran a un nivel consciente las limitaciones de la estructura conceptual construida en el transcurso de su escolarización y generaran significados gráficos del valor numérico de la función derivada segunda. La secuencia, especialmente desarrollada para esta investigación, enfrentó a los estudiantes con aspectos del concepto que no habían considerado, tal vez por no estar presentes en forma específica en los currículos, y permitió que descubrieran y propusieran formas de solucionar la problemática planteada. A partir del análisis que hemos realizado de distintos elementos creemos que los estudiantes nunca se habían enfrentado a actividades que pusieran en juego el significado gráfico de la función derivada segunda, de donde las actividades propuestas fueron para ellos realmente situaciones problemas.

Un ejemplo de las actividades que planteamos en nuestra investigación es el siguiente. Dado el gráfico de una función $f$:

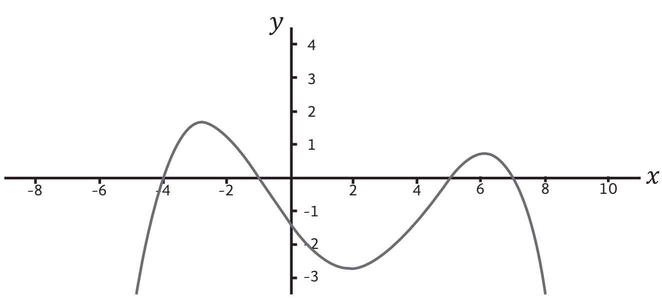



**Figura 27**. Gráfica de $f$ con inflexiones (Cantoral, Tesa, 2006).

Indica cuál afirmación es seguramente falsa, cuál es seguramente verdadera, cuál podría ser verdadera, en cuál no lo puedes contestar. Explica ampliamente tu respuesta.

a) $f''(3.8)=1$

b) $f''(1)=-2.5$

c) $f''(5)=-3$

d) $f''(1)< f''(8)$

e) $f''(-5)<f''(-3.8)$

f) $f''(2)<f''(3)$

En los incisos a), b) y d) se intenta establecer si el estudiante diferencia, a partir del gráfico, cuando la derivada segunda en cierto real es positiva y cuando negativa. Para dar respuestas a estas preguntas sólo se requiere haber significado correctamente el signo del valor numérico de la función derivada segunda. En cambio en los demás ítems el estudiante **debe significar el valor numérico de la función derivada segunda en un real en contexto gráfico**, ya no se compara a este real sólo con cero, ya no es suficiente haber asignado concavidad positiva", o negativa. Nos interesa ahora investigar qué información brinda al estudiante sobre el gráfico de una función $f$ que $f''(5)=-3$ o que $f''(5)=-4$, así como comparar los gráficos de la función $f$ con $f''(a)>f''(b)$ en el caso que ambos reales tengan el mismo signo. En otras palabras nos interesa observar cómo diferencian los estudiantes en el gráfico de una función la situación de que en dos reales la derivada segunda sea del mismo signo pero con distintos valores numéricos, $f''(3)=5$ y $f''(4)=9$ les indica que en ambos reales la concavidad de la función $f$ será positiva, pero, *¿cuál será el significado gráfico que asignarán los estudiantes a la diferencia en los valores numéricos?*

**Algunos resultados**. En una primer instancia el significado gráfico que asignan los estudiantes a la expresión $f''(a)=b$ es el previsto, si $b>0$ la función $f$ presenta concavidad positiva en $x=a$, y si $b<0$ la concavidad de $f$ es negativa en $x=a$, como podemos observar no se asigna un significado al valor numérico en sí de $f''(a)$ sino sólo a su signo. A medida que los estudiantes avanzaban en las actividades reconocen que asociar al real $f''(a)$ los conceptos "concavidad positiva" o "concavidad negativa" no es suficiente ni para determinar algunos aspectos gráficos de funciones en las cuales los valores numéricos de sus funciones derivadas segundas son distintos, pero de igual signo, aunque haya una relación entre este concepto y el signo de dichas funciones derivadas segundas; ni para comparar los valores numéricos de las funciones derivadas segundas en un real en el cual los gráficos de las funciones iniciales tienen concavidades del mismo signo. De la toma de conciencia de estas limitaciones comienzan a surgir conjeturas que intentan dar respuesta a estas nuevas situaciones.

Algunas de las conjeturas generadas por los estudiantes surgen del análisis de familias de parábolas y de funciones. Una de las familias de parábolas que analizan es la que surge a partir de la expresión de la forma $f(x)=ax^2$, el cual permitió a los estudiantes observar similitudes y diferencias en el comportamiento de sus gráficos al variar el coeficiente principal y a partir de allí generar conjeturas sobre el significado gráfico del valor numérico de la función derivada segunda. A partir de este análisis surge una relación "por dentro", o más "apretada", que será base de sus conjeturas. Si los estudiantes hubieran asumido cada parábola como un gráfico independiente, con características propias, y no como un gráfico perteneciente a una familia en la cual las variaciones determinan las similitudes y diferencias de los elementos de dicha familia, tal vez no hubieran podido generar herramientas para significar gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda.

El pensamiento y lenguaje variacional desarrollado por los estudiantes, evidenciado en el análisis de sus diálogos, les ha brindado herramientas para, entre otros aspectos, reconocer variaciones referidas a elementos que a su vez varían, estudiar los elementos constantes y variables de ciertas familias de gráficos, establecer relaciones entre la variación de una función y las funciones derivadas sucesivas, hacer presente la concepción de los elementos del dominio como elementos fijos e independientes entre ellos, a los cuales se les aplica un proceso, y de elementos que se pueden relacionar por ciertas variaciones, y además, comunicar oral y gestualmente sus conjeturas y argumentos.

El desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional de los estudiantes permitió enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda. Se deduce de nuestra investigación que el PyLV desarrollado por los estudiantes les brindó elementos para significar de manera gráfica a la función derivada segunda no sólo en términos de concavidad positiva o negativa. Para establecer una relación entre el signo de $f''(a)$ y el signo de la concavidad de $f$ en $x=a$ no se necesita poner en juego un PyLV, dado que puede concebirse la gráfica de $f$ como un objeto estático del cual sólo se tendrá en cuenta su concavidad en un entorno de $a$.

En cambio el significado que han asignado los estudiantes a $f''(a)$ al enfrentarse a la secuencia está basado en reconocer algunos de los aspectos variables y otros constantes de dicho gráfico; por ejemplo, la variación de los coeficientes angulares de las rectas tangentes al gráfico de la función $f$ en un entorno de $a$. Además se deduce que reconocer aspectos constantes y variables en sus análisis les permitió significar gráficamente aspectos gráficos de las funciones derivadas haciendo una ruptura entre la asociación derivada– fórmula pasando a considerar una asociación derivada – variación. Esta nueva concepción de la derivada rompe con la concepción curricular que comúnmente se realiza en los cursos, permitiendo resignificarla enriqueciéndola, "en las prácticas humanas, en las disciplinas de referencia, la derivada no se entiende exclusivamente como el límite del cociente incremental, sino como una forma de estudiar la evolución de un proceso de cambio, de crecimiento o de decrecimiento" (Cantoral, 2000). Por lo tanto, el desarrollo procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda... del pensamiento y lenguaje variacional ha permitiendo en estas actividades enriquecer los significados de conceptos que ya conocían y significar nuevos.

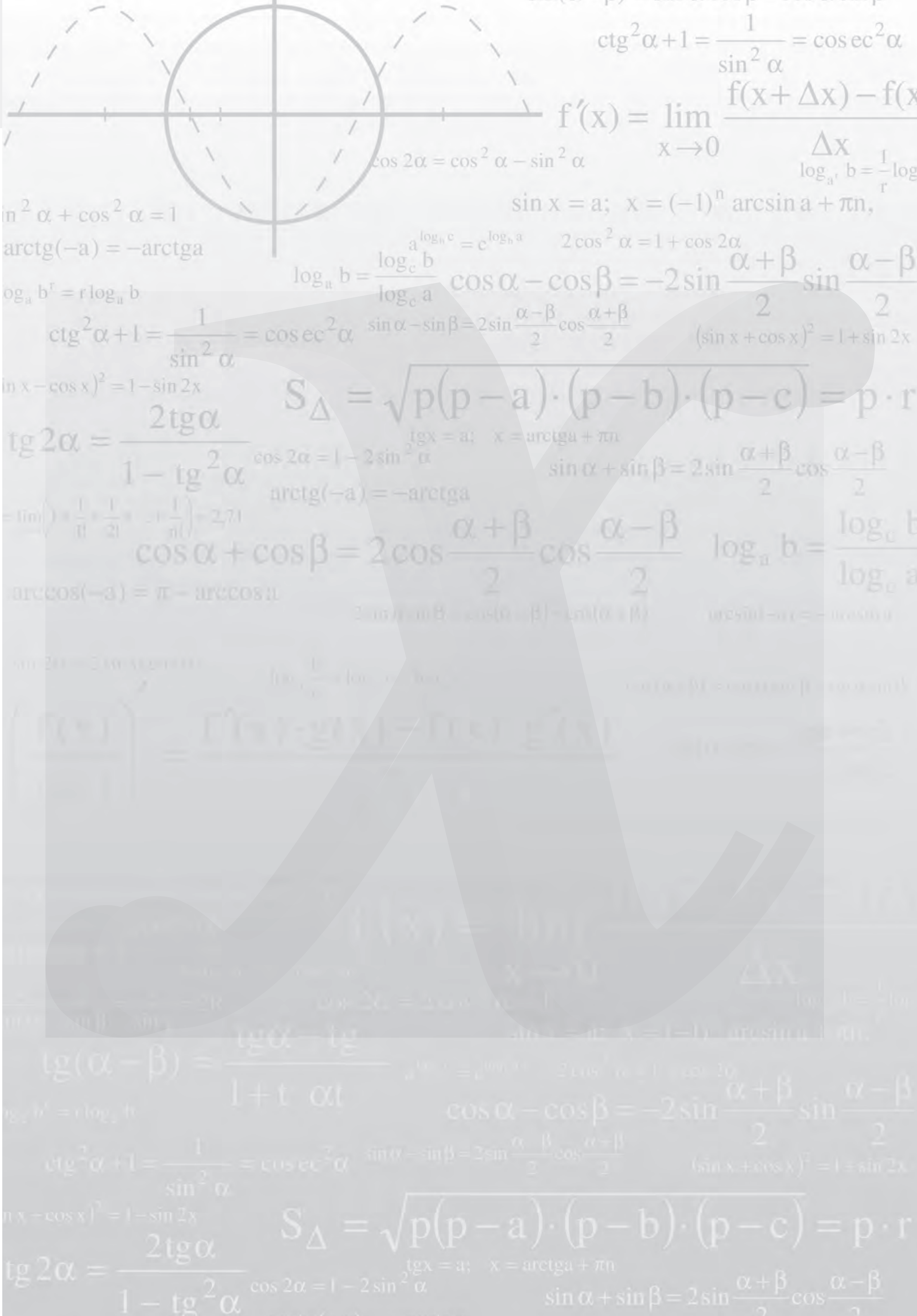
**Algunas recomendaciones didácticas.** Es la creencia de nuestro grupo de investigación, y la nuestra propia, que "el aprendizaje se basa en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas" (Cantoral, Farfán, 2000).

Por lo tanto, creemos que esta investigación brinda herramientas para generar nuevas actividades que tengan por objetivo que el estudiante signifique gráficamente al valor numérico de la función derivada segunda en un ambiente de descubrimiento, argumentaciones, confrontaciones. Esto permitirá, en forma específica, que enriquezca el concepto derivada segunda al romper las dos asociaciones fundamentales que hemos detectado: "derivada segunda–fórmula" y "derivada segunda–estudio de signo de concavidad", al resignificar el concepto permitiendo una visión gráfica de él, y además llevará a enriquecer el propio concepto "derivada" al realizarse una mirada del concepto desde una óptica no tradicional permitiendo generar una significación gráfica del valor numérico de la función derivada segunda, de la cual hemos dado muestras en nuestra investigación que no está presente en los cursos ni en los textos analizados. Además, creemos que esta nueva visión favorecerá la significación de la función derivada tercera y de las derivadas consecutivas. En forma general permitirá que el estudiante desarrolle su pensamiento y lenguaje variacional, que incremente su capacidad de visualizar en matemáticas y brinda la oportunidad de discutir con compañeros, conjeturar, argumentar, refutar, lo cual ayudará a que las ideas evolucionen hacia ideas más robustas matemáticamente.

Recomendamos, en términos generales, tanto a las y los docentes de matemáticas del bachillerato mexicano, como a los directivos del sistema, que se impulse la investigación educativa para que, previa adaptación y exploración, se puedan implementar las distintas actividades entre sus estudiantes. Como hemos dicho en todos los casos, se trata de diseños basados en la investigación con resultados muy favorables. Para su adecuada utilización es necesario que sean rediseñados por ustedes mismos con base en el contexto de sus alumnos y en la costumbre didáctica de su propia institución. El conocimiento matemático, para constituirse en saber, exige de su uso. En este sentido, los diseños que ustedes realicen podrán ser compartidos en sitios web que pondremos a su disposición.

Una nota final, el docente profesional ha desarrollado procesos de empoderamiento (Reyes, 2011); en este sentido, tiene bajo su acceso información pertinente de tipo profesional. Para ello recomendamos que se consulten todos los ejemplares de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*, revista indizada en **ISI Web** of Knowledge, en **ERIH** – European Reference Index for the Humanities, Índice de Revistas Mexicanas del Conacyt, en Latindex, RedALyC, Dialnet, MathDi y en una gran cantidad de prestigiosos índices extranjeros. Se trata de una revista especializada para el profesional en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Del mismo modo, recomendamos consultar la publicación anual del ALME – *Acta Latinoamericana de* Matemática Educativa. Sitio web: http://www.clame.org.mx/acta.htm



$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$
$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin x = a; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}a$
$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\log_a b^r = r\log_a b$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$
$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$
$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = p \cdot r$
$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$
$\mathrm{tg}x = a; \quad x = \mathrm{arctg}a + \pi n$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

# Semblanza
# Prof. Ricardo Cantoral Uriza

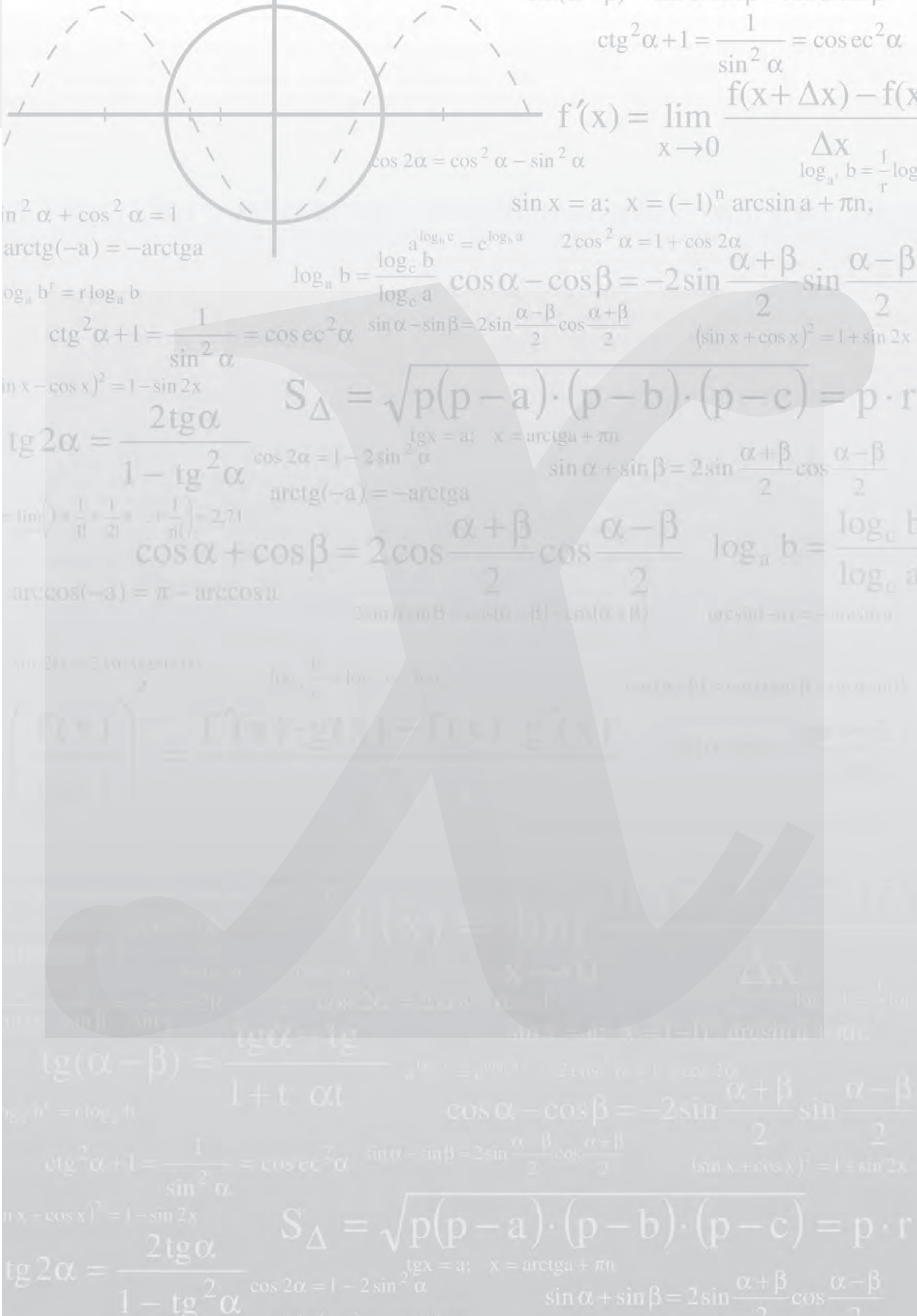
El profesor Ricardo Cantoral se desempeña como investigador titular 3D y ocupa el cargo de jefe del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN. Es investigador nacional del SNI desde 1985, y primer matemático educativo en ingresar a la Academia Mexicana de Ciencias (2000). Fue acreedor, en el año 2000, a la Guggenheim fellowship de la John Simon Guggenheim Memorial Foundation en Nueva York – EU. Fue el ganador del Premio Ciudad Capital – Heberto Castillo 2012, en el campo de Educación e impacto de la ciencia en la sociedad, otorgado por el gobierno de la Ciudad de México, a través del Instituto de Ciencia y Tecnología del DF. Recibió la Medalla al Mérito en Ciencias y Artes 2007 de parte de la Asamblea Legislativa del Distrito Federal, México. En 1998 obtuvo el primer lugar del Premio Internacional de investigación en Educación Matemática que otorga la Consejería de Ciencia de la Junta de Andalucía, España y de la Sociedad Thales y, en 1992, el premio nacional FIMPES por la excelencia en la investigación en educación superior. En 1991 desarrolló su proyecto posdoctoral, único financiado en física y matemáticas por el Fondo de Estudios R. J. Zevada. En 1998 fue nombrado investigador distinguido por el H. Consejo Consultivo del Instituto Politécnico Nacional, e investido como Profesor Honorario por la Universidad Primada de América, la Universidad Autónoma de Santo Domingo, en dos de sus facultades: Humanidades y Ciencias. En 2004 fue nombrado Profesor Honorario en Lima, Perú, por el área de ciencias de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.

Se graduó como Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa por el Cinvestav–IPN. Realizó una estancia posdoctoral en el laboratorio DIDIREM de la UFR des Mathématiques, Université Paris VII, en Francia y una estancia doctoral en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago, en EU. El doctor Cantoral fundó un campo de investigación sobre los procesos de construcción social del conocimiento matemático avanzado y de su difusión institucional, que ha acuñado como Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Antes de sus trabajos, las investigaciones ignoraban las dimensiones sociales y culturales del aprendizaje humano en el campo de las matemáticas avanzadas. Su contribución al campo se ubica sobre dos grandes avenidas: la teórica–metodológica (apertura de un campo para las ciencias sociales en el ámbito educativo de las ideas matemáticas) y la de impacto social (su empleo para vertebrar cambios en la educación mexicana contemporánea de millones de jóvenes estudiantes y de sus profesores tanto en nivel básico como en superior).

Ha publicado más de 140 artículos de investigación en temas de su especialidad, así como 25 escritos de difusión; coautor de 14 libros especializados y 15 libros de texto. Ha graduado a 102 posgraduados: 68 maestros y 12 doctores en ciencias y a 22 especialistas de posgrado; dirige tesis en diferentes países. Sus resultados en la investigación permitieron modificar el sistema nacional de formación de profesores en México y el cambio de las orientaciones didácticas para todo el magisterio nacional de la educación básica. Gracias a sus investigaciones, se pudo formular el programa de niños talento en el DF, al colocar la matemática y las ciencias en contextos de construcción social altamente innovadores, su enfoque sirvió también para modificar la formación de bachilleres en diversas instituciones nacionales.

rcantor@cinvestav.mx



# BIBLIOGRAFÍA


Acuña, C. (2013). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación.* Biblioteca de Educación– Didáctica Especial, Vol. 3. México: Gedisa Editorial.

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Editorial Trillas (nueva edición 2012).

Briceño, E., y Cordero, F. (2010). Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1003–1012.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. *Desarrollo del pensamiento matemático*, México: Trillas. 185–203.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(1), 1–9.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento. México: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42 (14–3), 353–369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Cantoral, R. *El futuro del cálculo infinitesimal.* México: Grupo Editorial Iberoamericana, 69–91.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. In Special

Issue, Radford, L & D'Amore (Guess Editors). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 83–102.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3 (3), 265–292.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Cantoral, R. y Testa, Y. (2006). Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar uruguayo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19(1), 845–850.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 265–286.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* vol. 21, 466–476.

Farfán, R.M. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Biblioteca de Educación–Didáctica Especial, Vol. 15. México: Gedisa.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9 (1), 435–458.

Reyes Daniela (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Valero, M. (2000). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesis de maestría no publicada. México: ITESM.

MATEMÁTICAS IV. *Serie Programas de Estudio*. México SEMS/DGB/DCA/SEP.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes, No. 19, 25–26.

Se terminó de imprimir y encuadernar en diciembre de 2013
en Impresora y Encuadernadora Progreso, S. A. de C. V. (IEPSA),
Calzada San Lorenzo 244; C.P. 09830, México, D. F.
El tiraje fue de 10,000 ejemplares.

ISBN: 978-607-9362-03-4

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR www.sems.gob.mx